HECTOR SEMINAR

Karlsruher Institut für Technologie

Mathematik durch Papierfalten

Abschlussdokumentation der Kooperationsphase 2016/2017

Durchgeführt am Schülerlabor Mathematik des Karlsruher Institut für Technologie unter Betreuung von Verena Möhler

Yannick Hoffmann
Gerberaweg 7
76297 Stutensee

Peter Lego
H.- Obermüller Straße 20
76137 Karlsruhe

Inhalt

1 Abstract 3
2 Einleitung 4
3 Material und Methoden 5
3.1 Papierfalten 5
3.2 Lehrpläne 5
3.3 Erarbeitung des Workshops 6
3.4 Hospitation eines Workshops 10
4 Ergebnisse 11
4.1 Girls´Day 11
4.2 Testdurchlauf des Workshops 12
4.3 osKArl 12
5 Diskussion 13
5.1 Auswertung der Evaluationsbögen 13
6 Anhang 14
6.1 Anhang 1 14
6.2 Anhang 2 15
6.3 Anhang 3 18
7 Danksagung 19
8 Selbstständigkeitserklärung 20

1 Abstract

In our cooperation phase within the Hector-Seminar with the Karlsruhe Institute of Technology we created a 90 minute workshop called "Mathematik durch Papierfalten" for students of the eight class and performed it afterwards. We wanted to show several advantages of folding paper within mathematics to the students. It should be an additional offer to school education, but also teach new mathematical correlations like the trisection of an angle, which is not possible with a circle and a ruler. Moreover, we included a little competition: the students had to construct an octahedron. The workshop we developed should be included in the program of workshops which the university offers, in case it is successful and fulfils certain criteria.

2 Einleitung

Betitelt wurde unser Projekt oftmals als „Mathematik durch Papierfalten“, was jedoch den zentralen Aspekt unserer Arbeit - das Erstellen eines Workshops - zunächst nicht berücksichtigt. Zielsetzung war es nämlich von Anfang an, einen Workshop für das Schülerlabor Mathematik am KIT[1] zu kreieren und abschließend durchzuführen. Ein weiteres Ziel ist die dauerhafte Übernahme unseres Workshops in das Programm des Schülerlabors.

Das Schülerlabor Mathematik ist im Mathematikgebäude des KIT untergebracht und bietet interessierten Schülern die Möglichkeit z.B. an Tagen der offenen Tür mit knapp 80 mathematischen Experimenten Neues zu entdecken und ihren mathematischen Horizont zu erweitern. Jedoch bietet sich für Schulklassen auch die Möglichkeit, ein Besuch des Schülerlabors zu buchen, was dann meist in Kombination mit der Teilnahme eines Workshops steht. Der Aufenthalt für die Schulklassen beginnt somit mit dem knapp 90 minütigen Workshop, welcher von weiteren 90 Minuten freiem Arbeiten im Schülerlabor abgerundet wird.

Zu den verschiedensten mathematischen Themen wie z.B. der Knotentheorie oder dem Goldenen Schnitt werden Workshops angeboten. Je nach mathematischer Tiefe und im Hinblick auf die entsprechenden Lehrpläne werden diese dann für die entsprechende Klassenstufe vorbereitet und ausgeschrieben.

Ziel eines solchen Workshops ist es, den Schülern neue Inhalte und Anwendungen der Mathematik aufzuzeigen und dabei eine Alternative bzw. eine Ergänzung zum herkömmlichen Unterricht darzustellen. Dies soll durch die behandelte Thematik an sich oder das Medium, mit dem Mathematik betrieben wird, in unserem Falle das Papierfalten, gelingen.

Da der Workshop später auch in das bestehende Angebot[2] übernommen werden soll, ist es notwendig Materialien bereitzustellen. Somit kann dieser dann auch von einer Person durchgeführt werden, welche an dessen Entwicklung nicht beteiligt war oder mit der Thematik bisher nicht vertraut war.

[1] http://www.math.kit.edu/didaktik/seite/schuelerlabor/ (Stand 25.07.17)

[2] http://www.math.kit.edu/didaktik/seite/workshops/ (Stand 25.07.17)

3 Material und Methoden

3.1 Papierfalten

Wir haben uns zuerst mit dem Papierfalten unter mathematischen Gesichtspunkten beschäftigt. Papierfalten ist eine in Europa seit dem 16. Jahrhundert verbreitete Technik, welche jedoch meist mehr mit Bastelei als mit Mathematik in Verbindung gebracht wird. Schnell stießen wir mit unseren Überlegungen auf die Geometrie, da diese ja beim herkömmlichen Falten bereits unbewusst angewandt wird. Hieraus gestaltete sich dann auch einer unserer Kerngedanken: Verstehen, was mathematisch betrachtet hinter simplen Faltmethoden steckt und was für Erkenntnisse man hieraus gewinnen kann (dies wird unter Anderem in der Station der Faltkrähe umgesetzt). Mit diesem Ansatz versucht man also aus Bestehendem neue Erkenntnisse zu ziehen. Die hierzu entgegengesetzte Variante ist es, die Methode des Papierfaltens bei ungelösten Problemen zu nutzen, wie es in unserem Workshop zum Beispiel bei der Dreiteilung des Winkels der Fall ist.

Bei dieser tritt besonders der Mehrwert des Papierfaltens zum Vorschein. Durch die Möglichkeit des Abbildens einer bestimmten Strecke auf eine beliebige Position (oder die banale Endlichkeit eines Blattes Papier und die somit entstehenden Kanten), ist das Falten der herkömmlichen Konstruktion mit Zirkel und Lineal überlegen. Hierdurch gelingt es, einen Winkel in drei gleich große Teile zu teilen, was mit Lineal und Zirkel unmöglich ist, weshalb es auch zu den drei großen mathematischen Problemen der Antike zählt.[3]

Zusammengefasst lässt sich also sagen, dass der Mehrwert des Papierfaltens darin liegt, Schritte der Konstruktion zu erleichtern oder ggf. sogar erst zu ermöglichen und diese auch zu veranschaulichen.

3.2 Lehrpläne

Damit der Workshop bestmöglich den Unterricht ergänzt, haben wir die Lehrpläne beachtet. Ursprünglich wollten wir den Workshop für die Klassenstufen sechs und sieben anbieten, merkten jedoch, dass es besser zum Lehrplan der achten Klasse passt. So werden beispielsweise Grundlagen wie die Winkelhalbierende und die Winkelsätze in der achten Klasse durchgenommen. Wir haben auch darauf geachtet, den Schülern etwas Neues zu bieten, was nach dem Lehrplan nicht durchgenommen wird. Die Dreiteilung eines Winkels ist das beste Beispiel hierfür. Wir haben allerdings

[3] https://de.wikipedia.org/wiki/Dreiteilung_des_Winkels#Dreiteilung_des_Winkels_mit_Origami (Stand 25.07.17)

auch darauf geachtet, dass die Grundvoraussetzungen, in diesem Fall die Kongruenzsätze, bereits erlernt worden sind.[4]

3.3 Erarbeitung des Workshops

Das Thema Mathematik durch Papierfalten ist sehr groß, weshalb es nicht möglich ist alle Aspekte in einen Workshop zu integrieren. Unser Workshop sollte vielfältig und interessant sein. Etwas Neues bieten, aber auch das im Unterricht erlernte Wissen vertiefen. Wir mussten auch darauf achten, die vorgegeben Zeit von 90 Minuten einzuhalten. So mussten wir im Verlauf des Schuljahres den Satz des Thales aus unserem Workshop herausnehmen, da der Workshop ansonsten zu lang dauern würde.
Für die einzelnen Stationen des Workshops haben wir uns teilweise an einem Buch[5] orientiert, und die dort gewonnenen Anreize genutzt, um für unseren Workshop abgestimmte Aufgaben zu kreieren. Somit haben wir folgende Unterpunkte in unseren Workshop integriert:

Oktaeder

Als Einstieg haben wir eine praktische Aufgabe gewählt, die dazu dient das Interesse zu wecken. Zuerst bekommt jeder Teilnehmer zwei quadratische Papiere, die mittels Anleitung zu den Modulen gefaltet werden. Anschließend werden die Module, während einer Gruppenarbeitsphase, zu einem Kantenmodell eines Oktaeders zusammengesteckt.

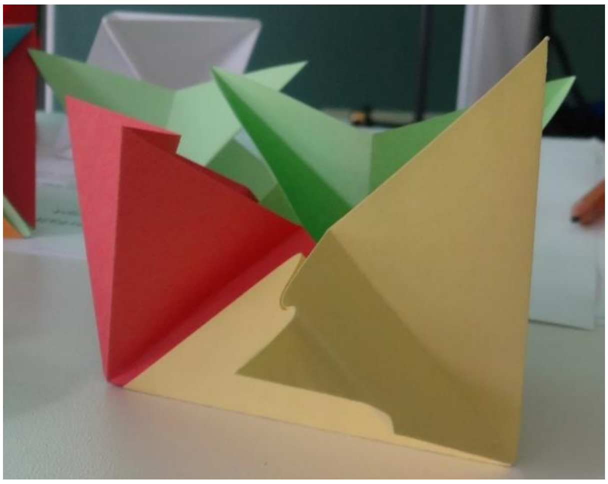

Abb. 1: Module, die bereits teilweise ineinander gesteckt worden sind.

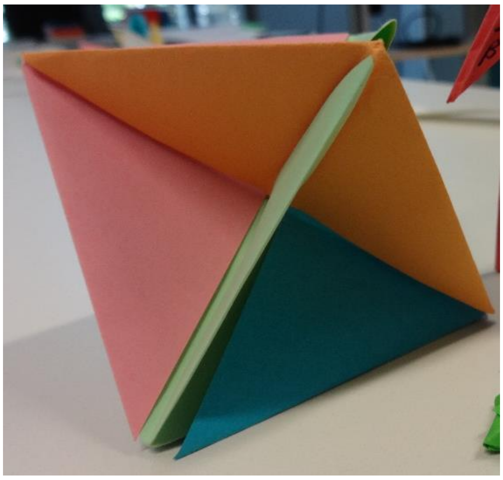

Abb. 2: Fertiges Kantenmodell eines Oktaeders

---

[4] http://www.bildungsplaene-bw.de/,Lde/LS/BP2016BW/ALLG/GYM/M/IK/7-8/03 (Stand 25.07.17)

[5] Moderner Unterricht: Papierfalten im Mathematikunterricht, Klett Verlag

Es ist dabei wichtig darauf zu achten, wie man die Module zusammensteckt, ansonsten ist der Oktaeder nicht stabil und fällt auseinander. Die Gruppenarbeit wird als Wettbewerb ausgeführt, um die Motivation zu erhöhen. Nachdem die Kantenmodelle fertiggestellt sind, findet eine Besprechung der Eigenschaften des platonischen Körpers Oktaeder statt. Eine Eigenschaft ist, dass die Oberfläche, die man sich beim Kantenmodell vorstellen muss, welche aus acht gleichseitigen Dreiecken besteht. Anschließen muss diese noch begründet werden. Hier helfen einzelne Module, da sie alle identisch sind. Somit sind alle Außenkanten gleich lang. Mit Hilfe der Module lassen sich auch die rechten Winkeln an den Ecken erklären, da die Form des Moduls rechtwinklige Dreiecke aufweist.

Die Krähe

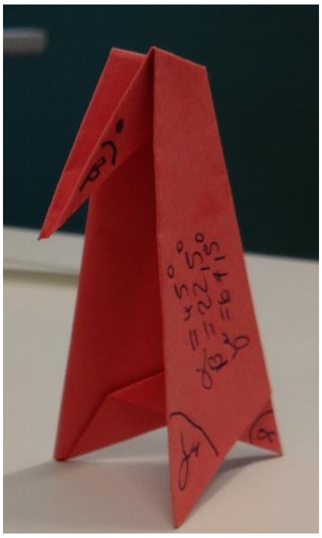

Abb. 3: Fertige Krähe mit bereits eingezeichneten Winkeln

Als nächstes haben wir ein anschauliches Beispiel gewählt. Es wird zuerst eine Krähe aus Papier gefaltet. Hierfür wird nur ein herkömmlicher Notizzettel benötigt. Dieser wird diagonal gefaltet und wieder aufgeklappt. Hier findet die erste Winkelteilung statt, indem der rechte Winkel der Ecke halbiert wird. Anschließend sind die zwei am Winkel anliegenden Seiten zur Mitte des Quadrats hinzufalten. Das obere Ende des soeben entstandenen Drachenvierecks (auch Deltoid genannt) wird durch eine doppelte Faltung verkürzt. Dies bewirkt, dass die Krähe später von allein stehen kann.

Nun wird die Figur an der Mittelachse zusammengeklappt. Hierdurch wird der zuvor halbierte Winkel nochmals halbiert; folglich beträgt dieser nun 22,5°. Nachdem im letzten Faltschritt der Kopf der Krähe durch einknicken der Spitze gefaltet wird, wird den Schülern der Arbeitsauftrag erteilt. Man benennt die drei in Abb. 3 gezeigten Winkel und stellt die Aufgabe, die Größe dieser herauszufinden. Als Hilfestellung dient nur die Tatsache, dass es sich um ein quadratisches Stück Papier handelt und das bei allen Faltungen exakt gefaltet wurde. Die Winkel α und β lassen sich durch die beschriebenen Faltschritte, bei denen Winkel halbiert wurden, erklären. Um die Größe des Winkels γ herauszufinden, muss die Winkelsumme angewandt werden, druch Welche sich eine Weite von 67,5° ergibt.

Hier wird gezeigt, dass das Falten einen großen Vorteil gegenüber dem Zeichnen hat: ein Winkel wird durch eine einzige Faltung halbiert, während das Lösen dieser Aufgabe mittels zeichnerischer Konstruktion deutlich aufwendiger ist.

Papierstreifen

Die nächste Aufgabe beschäftigt sich mit einem einfachen Papierstreifen. Es geht darum, einen rechten Winkel durchs Falten zu erhalten, wobei die Faltlinie nicht rechtwinklig zur Kante des Streifens sein soll. In Abbildung sechs wird eine mögliche Lösung gezeigt. Die gestrichelten Linien sind Faltlinien und an der durchgezogenen Linie berühren sich die Kanten der gefalteten Streifenteile. Der rechte blaue und der linke rote Winkel ergeben einen rechten Winkel. Im zweiten Teil soll nun über die Winkelsätze begründet werden, dass es sich um einen rechten Winkel handelt.

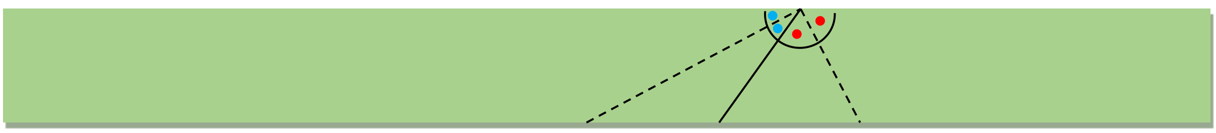

Abb. 4: Das grüne Rechteck stellt einen Papierstreifen dar.

Durch die beiden Faltungen werden die Winkel zwischen der durchgezogenen Linie und der oberen Kante halbiert. Deshalb sind jeweils die beiden blauen Winkel und die roten Winkel gleich groß. Alle vier Winkel zusammen ergeben 180°, deshalb ergibt ein blauer und ein roter zusammen 90°. Dies ist der Beweis für den rechten Winkel.

Dreiteilung des Winkels

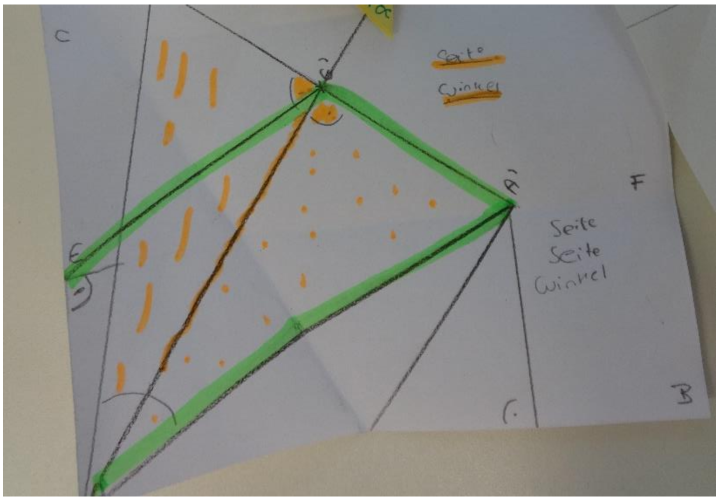

Abb. 5: Gedrittelter Winkel mit Hilfslinien

Die Dreiteilung des Winkels ist der Höhepunkt des Workshops. Als Einstieg wird hier der Arbeitsauftrag erteilt, einen beliebigen Winkel auf ein Blatt zu zeichnen und diesen mittels Zirkel und Lineal zu halbieren. Anschließend gilt es selbigen Winkel zu dritteln. Die Schüler probieren zunächst ein ähnliches Verfahren anzuwenden, bis nach kurzer Zeit aufgelöst wird, dass eine solche Konstruktion schlichtweg nicht möglich ist. Deshalb wird nun ein DIN-A5-Blatt zur Hand genommen. Im ersten Schritt des

Unterrichtsgespräches wird nun von jedem Schüler ein beliebig großer Winkel in das Blatt gefaltet. Danach werden später benötigte Hilfslinien gefaltet, indem das Blatt zunächst horizontal halbiert wird. Die so entstandene untere Hälfte wird nochmals halbiert. Hierauf folgt die schwierigste Faltung: Die linke untere Ecke des Blattes wird so auf die Viertellinie gefaltet, dass das linke Ende der Halbierenden auf dem zu Beginn gefalteten Winkel liegt. Diese neu entstandene Strecke wird markiert. Das somit entstandene Trapez (grün hervorgehoben in Abb. 5) wird mit den Schülern besprochen. Vor allem auf die Symmetrie und deren Begründung mittels Winkeln wird hier Wert gelegt. Daraus folgt auch die Begründung, warum sich die Geraden in der rechten oberen des Trapezes in einem rechten Winkel schneiden. Die jetzt sichtbaren Dreiecke (orange) werden nun genauer betrachtet. Schnell fällt den Schülern auf, dass diese deckungsgleich, also kongruent, sind. Dies wird darauffolgend auch mit dem Kongruenzsatz Seite-Winkel-Seite nachgewiesen. Als nächste Hilfslinie dient das Lot der rechten unteren Ecke des Trapezes zur unteren Kante des Blattes hin. Das entstandene Dreieck erweist sich mit dem Kongruenzsatz Winkel-Seite-große Seite auch als kongruent. Somit wurde bewiesen, dass alle Dreiecke kongruent sind und somit der jeweilige Winkel in der linken Ecke identisch ist. Gleichzeit stellt dieser Winkel ein Drittel des gesamten Winkels dar.

Lucky Star

Zum Abschluss wird noch ein kleiner Papierstern namens Lucky Star aus einem Papierstreifen hergestellt. In einen Papierstreifen wird ein Knoten gemacht, der glattgezogen wird. Anschließend wird der restliche Streifen um den Knoten gewickelt. Die Form des Knotens entspricht einem Fünfeck und, nachdem man die Kanten etwas eingedrückt hat, sieht es aus wie ein Stern.

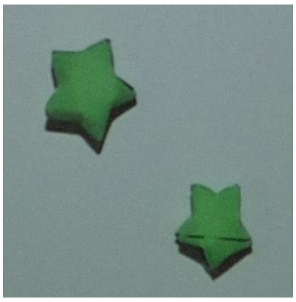

Abb. 6: Zwei Lucky Stars

Wir haben den Workshop vom Praktischen hin zum Theoretischen gegliedert. Dabei steht immer noch das Papierfalten im Vordergrund. Als begleitendes Hilfsmittel dient eine Powerpoint-Präsentation (Anhang 1). Größtenteils falteten wir mit Hilfe des Visualizers vor und besprachen die Ergebnisse.

Wir haben die einzelnen Punkte unter uns aufgeteilt und besprachen das Erarbeitete und das weitere Vorgehen in regelmäßigen Treffen. Im Verlauf des Jahres optimierten die Themenauswahl und arbeiteten diese mit Frau Möhlers Hilfe aus.

Um den Workshop dauerhaft in das Programm des Schülerlabors einbinden zu können, ist es wichtig, dass sich spätere Referenten schnell in die Thematik einarbeiten können. Deshalb gestalteten wir einen tabellarischen Ablaufplan (Anhang 2) sowie ein Skript (Anhang 3).

3.4 Hospitation eines Workshops

Wir hospitierten einen bereits etablierten Workshop, um erst einmal die Abläufe und Rahmenbedingungen eines Workshops kennenzulernen. Für uns ergab sich die Möglichkeit einen Workshop zum Thema Primzahlen zu hospitieren, der am 26.01.2017 stattfand.

Hieraus ergaben sich für uns verschiedene Erkenntnisse: Zum einen wurde klar, dass unser bis dato zusammengestelltes Programm deutlich zu umfangreich war, da es teilweise enorm viel Zeit in Anspruch nimmt, allen Schülern die Inhalte gleichermaßen verständlich zu machen.

Auch bekamen wir die Inspiration, direkt mit einem möglichst praktischen Inhalt zu starten, um die Schüler für das Thema zu begeistern. Dies setzten wir dann auch später in der ersten Station unseres Workshops, dem Falten und Zusammenstecken des Oktaeders, um.

Darüber hinaus empfahl sich das Hauptmedium von Arbeitsblättern in Papierform auf Folien in der Begleitpräsentation umzustellen.

Ebenfalls wurde uns bei unserer Hospitation klar, wie wichtig es ist, im Voraus sich mit der gegebenen Technik vertraut zu machen und die Funktionalität dieser zu prüfen.

Die letzte Erkenntnis für uns war, dass es hilfreich für den reibungslosen Ablauf des Workshops ist, sich vorher mit der jeweiligen Lehrkraft in Verbindung zu setzen und zu klären, welche theoretischen Grundlagen bei den Schülern bereits gegeben sind und was noch zu erarbeiten ist.

4 Ergebnisse

4.1 Girls´Day

Eine erste Möglichkeit für die Probe mit Schülern entsprechenden Alters bot sich im Rahmen des Girls´Day[6] an. Der Girls´Day ist ein Tag im Jahr, an welchem Mädchen ab der 5. Klasse einen Tag lang Einblicke in Ausbildungsberufe oder Studiengänge im Bereich Handwerk, IT, Naturwissenschaft und Technik geboten werden. Auf unsere Ausschreibung hin meldeten sich vier Mädchen an. Nach größtenteils reibungsloser Durchführung des Workshops, bei welcher Peter Lego leider verhindert war, erhielten wir äußerst positives Feedback.

Leider musste dieses Feedback etwas relativiert werden, da zu berücksichtigen ist, dass hier der Workshop quasi unter Idealbedingungen durchgeführt wurde: Morgens mit 4 mathematikbegeisterten Schülerinnen anstatt wie später nachmittags mit knapp 30 mittelprächtig motivierten Schülerinnen und Schülern.

Nichtsdestotrotz wussten wir nun, dass die Thematik interessant und unsere Inhalte ansprechend gestaltet waren.

Festzuhaltende Ergebnisse waren, dass der Umfang der Herleitung der Dreiteilung ggf. aus Zeitgründen reduziert werden muss. Auch sollte vor der finalen Durchführung der Umgang mit dem Visualizer geübt werden, da sonst wichtige Zeit bei unklaren Faltanweisungen verloren geht.

Abb. 7: Testdurchlauf des Workshops beim Girls´Day

[6] https://www.girls-day.de/aktool/ez/eventvcard.aspx?id=69571 (Stand 25.07.17)

4.2 Testdurchlauf des Workshops

Am 30.06.2017 haben wir mit einer achten Klasse am Nachmittag den Workshop durchgeführt. Beim Girls´Day haben wir bereits erste Eindrücke gesammelt, jedoch hat es sich dabei nur um eine kleine Gruppe und nicht um eine ganze Schulklasse gehandelt. Ziel war es herauszufinden, wie der Workshop ankommt, ob die zeitliche Einteilung passt und wie gut die Schüler mitkommen. Während des Workshops bemerkten wir, dass es erheblich schwerer ist, die Aufmerksamkeit aller Schüler zu bekommen und man musste auch einschätzen, wann man die Arbeitsphase beendet und mit dem Programm fortfährt. Das heißt, man muss den Punkt finden, bei dem die meisten fertig und niemand zu lang warten muss. Hilfreich war es durch die Reihen zu gehen und Schülern, die nicht vorankamen, Tipps zu geben. So wurde dafür gesorgt, dass alle dem Inhalt weitestgehend folgen konnten. Letztendlich hat es von der Zeit sehr gut gepasst und die meisten sind mit den Aufgaben zurechtgekommen.

4.3 osKArl

Um die Arbeit an unseren Projekten zur Schau zu stellen und bewerten zu lassen, nahmen alle Projekte der Kooperationsphase geschlossen am osKArl teil. Der osKArl ist ein Preis, welcher von Schülern erarbeitete wissenschaftliche Projekte honoriert und im Rahmen des Wissenschaftsfestival „Effekte“ im Karlsruher Schlossgarten verliehen wird.

Jedes Projekt bekam die Möglichkeit ihre Arbeit in einem einen Stand zu präsentieren, welche dann von einer Jury nach einer Fragerunde abschließend bewertet wird.

Die Schwierigkeit für uns als didaktisches Projekt war es nun, den Besuchern des Festivals klarzumachen, dass unsere Aufgabe in erster Linie in der Erstellung des Workshops lag und nicht etwa ein Forschungsprojekt war. Zugute kam uns jedoch, dass wir vor allem den zahlreichen Kindern viel Mathematik „in die Hand geben“ konnten, da sie selbst Falten konnten, und je nach mathematischen Vorwissen auch die mathematischen Hintergründe verstehen konnten.

5 Diskussion

5.1 Auswertung der Evaluationsbögen

Um Kritik und Verbesserungsvorschläge der Teilnehmer zu bekommen, erstellten wir einen Evaluationsbogen (Anhang 4), welcher von den Schülern und begleitenden Lehrkräften ausgefüllt wurde.

Hieraus erfuhren wir, dass unsere Inhalte die Schüler größtenteils interessiert haben und sie gerne noch an der Thematik weiterarbeiten würden. Vor allem das Zusammenstecken des Oktaeders bereitete allen große Freude, weshalb für diesen Teil des Workshops in Zukunft etwas mehr Zeit eingeplant werden sollte. Diese Zeit wird dann vermutlich bei der Dreiteilung des Winkels eingespart, da dieser Teil einigen Schülern zu lang erschien. Darüber hinaus wurde unsere Kommunikation mit den Schülern sowie die Hilfestellungen gelobt, jedoch sollte bei Unruhe der Klasse etwas strenger und direkter durchgegriffen werden. Auch bemerkten wir selbst während der Durchführung, dass das Falten unter dem Visualizer und das gleichzeitige Erklären etwas Übung erfordert. Im Großen und Ganzen sind es nur Details, die abgeändert werden müssen, um den Teilnehmern des Workshops die bestmögliche Erfahrung zu bieten.

6 Anhang

6.1 Anhang 1

Mathematik durch Papierfalten – Ablaufplan

Ablauf	Notizen	Material
1. Begrüßung & Einführung ins Thema; (Verweis auf das Schülerlabor)		
2. Oktaeder falten & Besonderheiten aufzeigen (Winkel) / Wettbewerb a. Gemeinsames Falten der Faltmodule (Visualizer) b. Aufgabe: Stellt Besonderheiten dieser Module fest. (Winkel...) c. Wettbewerb (3er- Gruppen): Kantenmodel eines Oktaeder erstellen aus Modulen (Kantenmodell des Oktaeders steht als Vorlage bereit) d. Eigenschaften der Figur besprechen e. (Übertragen dessen allgemein auf platonische Körper)		Papier für Faltmodul *Visualizer*
3. Krähe falten & Winkel bestimmen, Winkelsumme a. Einführung als Faltbastelei (Folie) b. Gemeinsames Falten der Krähen und Einzeichnen der Winkel c. Aufgabe: Findet alle gesuchten Winkel heraus und begründet, warum ihr auf dieses Ergebnis gekommen seid. d. Besprechung der Lösung (ggf. Herleitung der Winkelsumme) i. a: Halbierung des rechten Winkels ii. b: Doppelte Teilung des rechten Winkels iii. c: Erschließt sich durch Winkelsumme		Quadratisches Papier *Visualizer*
4. Streifen mit besonderen Dreiecken a. Material b. Rechter Winkel im Streifen i. Rechten Winkel falten ii. Rechten Winkel (nicht parallel zur Kante) falten iii. Beweis, dass es sich um einen rechten Winkel handelt c. (Lucky Star) -> Ende		Papierstreifen *Visualizer* *Visualizer*
5. Dreiteilung des Winkels durch Papierfalten a. Dreiteilung durch Zeichnen (Lineal, Zirkel & Stift) i. Aufgabe: Zeichnet einen beliebigen Winkel und halbiert diesen ii. Besprechung iii. Aufgabe: Neuer Winkel, jetzt Dritteln Auflösung: zeichnerisch nicht möglich, jedoch mit Falten **Einstieg: Geschichtliches** b. Falten im Unterrichtsgespräch i. Falten eines beliebigen Winkels ii. Parallelen falten iii. Dreieck umklappen; Strecke markieren *iv. Begründung Symmetrie d. Trapez* *v.* Schnittpunkt der Strecken I einzeichnen *vi. Begründung* *vii. Kongruenz der beiden Dreiecke nachweißen* *viii.* Lot zu unteren Seite einzeichnen *ix. Begründung der Kongruenz der beiden letzten Dreiecke.*		DINA4 Papier *Visualizer*
x. Zusammenfassende Begründung		
6. Zusatz: Fünfeckknoten Konstruiert ein regelmäßiges Fünfeck Schneller: Macht einen Knoten in den Streifen und zieht ihn glatt		Papier für Faltmodule *Visualizer*

Abb. 13: Tabellarischer Ablaufplan

6.2 Anhang 2

Skript

1.Begrüßung:

Willkommen zu unserem Workshop…

Ihr habt alle bestimmt schon unzählige Male etwas aus Papier gefaltet und Ihr habt alle sicher schon viele Stunden Mathematik betrieben, doch kombiniert habt Ihr das wahrscheinlich noch nie! Genau das wollen wir heute zusammen machen, und dabei zeigen, welche Tricks schon mit nur wenigen Faltungen möglich sind, und uns danach zu fragen, was für mathematische Grundlagen dahinterstecken.

2.Oktaeder

Damit wir gleich ein wenig warm werden, fangen wir doch gleich mal damit an, etwas zu falten.

Wir fangen an, indem wir zuerst einmal Module, also kleinere Einheiten, falten, welche wir dann später weiterverarbeiten werden.

Falten der Module

Jetzt habt ihr alle benötigen Module um das Kantenmodell eines Oktaeders zu erstellen, das, wenn es fertig ist, dann so aussehen soll. Teilt euch immer zu dritt in Gruppen ein, dass ihr 6 solcher Module habt. Mal sehen, welche Gruppe es zuerst schafft, selbst einen Oktaeder zusammenzustecken!

Wettbewerb

Fallen euch an dieser Figur Besonderheiten auf?

Besprechung der Besonderheiten des Oktaeders

Vergleich Modell mit gefalt. Kantenmodell

3. Krähe

Das was ich hier in meiner Hand habe, dürften alle erkennen, eine Krähe. Diese Krähe könnte ganz normal beim Basteln von zum Beispiel Herbstdekoration entstanden sein, fernab von jeglicher Mathematik. Doch vielleicht steckt ja in der Krähe doch mehr Mathe, als man im ersten Moment vielleicht denken mag, weswegen wir sie jetzt zusammen falten.

Falten der Krähe

So jetzt haben wir alle unsere Krähen fertig und zeichnen mal diese drei Winkel ein. Nun ist es eure Aufgabe, die Größe der jeweiligen Winkel zu bestimmen und eure Antwort zu begründen!

Winkel herausfinden

4. Papierstreifen

Nach der Krähe kommen wir jetzt zu etwas einfacherem. Stellt euch vor, ihr wollt prüfen, ob ein Winkel rechtwinklig ist und ihr habt kein Geodreieck zur verfügen. Nur einen Papierstreifen. Versucht einen rechten Winkel zu falten.

Papierstreifen falten

Versucht nun den rechten Winkel so zu falten, so dass die Faltlinie nicht rechtwinklig zur Kante des Streifens ist.

Papierstreifen falten

Als nächstes zeigt ihr anhand der verschiedenen Winkel, dass es sich tatsächlich um einen rechten Winkel handelt.

Beweisen des rechten Winkels

Lucky star

5. Dreiteilung

So nun kommen wir zum mathematischen Höhepunkt unseres Workshops, wir wollen mit Hilfe des Papierfaltens einen Winkel in drei gleich Große Teile zerteilen. Einen Winkel in zwei Teile geteilt, also halbiert habt ihr alle bestimmt schon einmal mit Lineal und Zirkel gemacht. Damit wir das alle wieder vor Augen haben, bitte ich euch, einen beliebigen Winkel einzuzeichnen und diesen mit Lineal und Zirkel zu halbieren.

Winkel Halbieren

So jetzt wollen wir mal den Winkel nicht in zwei, sondern in drei gleich große Teile zerteilen, also gleiche Aufgabe wie eben, nur diesmal den Winkel dritteln.

Winkel dritteln

Die meisten von euch werden es schnell bemerkt haben, bei der Dreiteilung des Winkels kommt man mit dieser Methode nicht sehr weit. Deswegen wollen wir jetzt probieren, den Winkel durch geschicktes Falten zu dritteln und vor allem dann auch unser Ergebnis zu begründen.

Als erstes falten wir einmal einen beliebigen Winkel in unser Blatt, der ungefähr so groß ist wie der, den ich hier eingefaltet habe. Danach halbieren wir das Blatt mit einer horizontalen Faltlinie. Jetzt halbieren wir die untere Hälfte unseres Blattes nochmals mit einer horizontalen Faltlinie.

Der nächste Schritt wird etwas knifflig, also gut aufpassen: Wir falten die linke untere Ecke so auf unsere Viertellinie, dass unser äußerster linker Punkt der Halbierenden gleichzeitig auch auf unserem am Anfang gefaltetem Winkel liegt. Jetzt müsst ihr noch die rüber gefaltete, davor linke Seite, einmal nachziehen/markieren, sowie die Enden der gefalteten Halbierenden.

Wenn wir uns jetzt diese Figur, ein Trapez, anschauen stellen wir bestimmt eine Besonderheit fest. (Symmetrie)

Symmetrie des Trapezes

Jetzt sieht man, dass sich diese drei Geraden in genau diesem Punkt hier schneiden.

Warum ist das so?

Außerdem sieht man hier einen rechten Winkel.

Wie können wir beweisen, dass dieser echtwinklig ist? Tipp: Symmetrie des Trapezes

Sind diese beiden entstandenen Dreiecke kongruent?

Warum?

Jetzt zeichnen wir noch eine neue Strecke ein, das Lot zur unteren Seite von der unteren Ecke unseres Dreieckes aus.

Warum ist diese Strecke genau so lang wie die Seite des Dreieckes? Tipp: Faltung vom Anfang

Wenn wir jetzt diese beiden Dreiecke haben, können wir auch etwas über ihre Kongruenz sagen?

- ➔ Also haben wir jetzt gezeigt, dass alle Dreiecke kongruent sind, also drei gleich große Winkel besitzen, deswegen teilen also diese zwei Linien hier den Winkel in drei genau gleich große Teile

6. Fünfeckknoten

Jetzt nehmen wir einen weiteren Papierstreifen und machen einen Knoten. Anschließend zieht ihr ihn glatt. Ihr müsst dabei aufpassen, dass der Papierstreifen nicht reißt. Welche geometrische Figur entsteht?

Verknoten des Papierstreifens

6.3 Anhang 3

Workshop: Mathematik durch Papierfalten

1. Fandest Du den Inhalt des Workshops interessant?

2. Konntest Du dem Workshop größtenteils gut folgen?

3. Fandest Du den Workshop zeitlich gut geplant ?

4. Wurden die Anweisungen von den Leitern des Workshops verständlich erteilt?

5. Was hat Dir am besten gefallen?

6. Von was hättest du gerne noch mehr gemacht?

7. Was hat dich am Workshop gestört/ Was hat Dir nicht gut gefallen?

Sonstige Anmerkungen:

Abb. 14: An Schüler ausgehändigter Evaluationsbogen

7 Danksagung

Wir bedanken uns bei Verena Möhler, die unser Projekt betreut hat und uns immer wieder mit neuen Anreizen unterstützte und uns einige organisatorische Last von den Schultern nahm.

Außerdem gilt unser Dank dem Karlsruher Institut für Technologie und dem Schülerlabor Mathematik, welche uns Räumlichkeiten wie auch Medien zur Verfügung stellten.

Des Weiteren möchten wir uns beim Hector-Seminar, insbesondere bei unseren Kursleitern Thomas Knecht und Anke Richert bedanken, die uns das ganze Projekt hindurch unterstützten.

8 Selbstständigkeitserklärung

Hierdurch versichern wir, dass wir die Arbeit an unserem Projekt und dieser Dokumentation eigenständig unter Betreuung von Verena Möhler durchgeführt und nur auf angegebene Quellen zurückgegriffen haben.

Ort, Datum Yannick Hoffmann

Ort, Datum Peter Lego