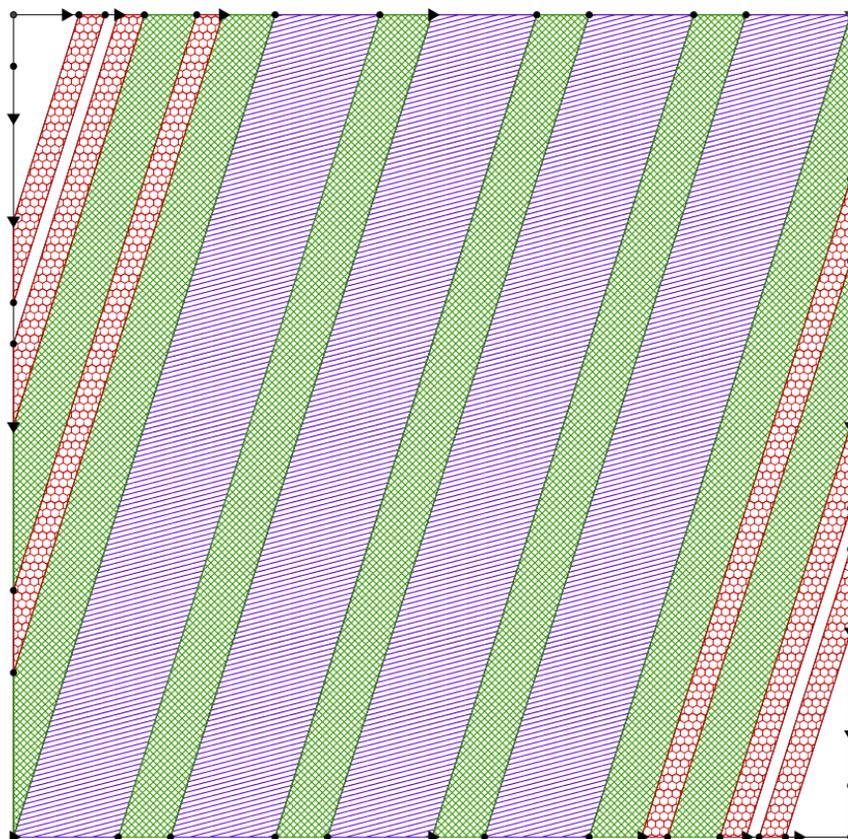




Zylindermoduln der Chamanara-Fläche



Abschlussdokumentation der Kooperationsphase 2016/17

Michael Schmalian
Betreut von Prof. Dr. Frank Herrlich
am Institut für Algebra und Geometrie (IAG) am KIT

Inhaltsverzeichnis

1	Abstract	2
2	Einführung in Themen und Begriffe	3
3	Zusammenfassung von "Notes on the Veech Group of the Chamanara surface"[1] von Frank Herrlich und Anja Randecker	11
4	Zylindermoduln der Chamanara-Fläche	18
5	Ausblick	21
6	Danksagung	22
7	Literatur	22
	Index	23
8	Selbständigkeitserklärung	24

1 Abstract

We prove, that there are at most two different cylinder moduli in a cylinder decomposition of the Chamanara surface.

The Chamanara surface, introduced 2004 by Reza Chamanara, is defined by the identification of infinitely many opposite segments of the unit square and has been studied in depth by Frank Herrlich and Anja Randecker. Their work on this surface culminates in the paper "Notes on the Veech group of the Chamanara surface" published 2016 and inspires this project. A corollary of their paper is a classification of all parabolic elements or in other words twisting elements of the Veech group. This result is deeply integrated into our proof, since there is a strong correlation between cylinder decompositions, dissections of the surface into parallel strips and parabolic elements of the Veech group. We strengthen this correlation and are thus able to prove the simplicity of the cylinder moduli.

2 Einführung in Themen und Begriffe

Wir behandeln im Nachfolgenden Translationsflächen und korrelierte Objekte auf informelle Art, um einen Einblick in das Thema zu bekommen.

Definition 2.1. Translationsfläche

Eine Fläche, die durch Verkleben paralleler gleich langer (also durch Translationen ineinander überführbare) Seiten von Polyedern entsteht, nennen wir Translationsfläche.

Zur Veranschaulichung betrachten wir eine der einfachsten Translationsflächen: die Verklebung eines Einheitsquadrats zu einem Torus. Dabei werden gegenüberliegende Seiten miteinander verklebt (siehe Abbildung 1).

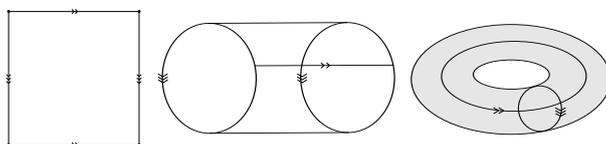


Abbildung 1: Der Torus als Translationsfläche

Wir betrachten noch eine komplizierte Translationsfläche, die Chamanara-Fläche.

Definition 2.2. Chamanara-Fläche [4]

Die Chamanara-Fläche ist eine Translationsfläche, die durch unendlich häufiges Verkleben auf dem Einheitsquadrat entsteht. Dabei werden die Seiten des Einheitsquadrates jeweils in unendlich viele Abschnitten a, b, \dots zerlegt, so dass der n -te Abschnitt die Länge $(\frac{1}{2})^n$ hat. Die kürzeren Abschnitte sollen in der oberen linken und der unteren rechten Ecke liegen. Verklebt werden gegenüberliegende Abschnitte gleicher Länge (siehe Abbildung 2).

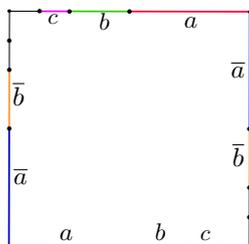


Abbildung 2: Die Chamanara-Fläche

Eine Besonderheit der Chamanara-Fläche ist das Verhalten der Enden der verklebten Strecken. Der linke Endpunkt von a ist verklebt mit dem rechten Endpunkt von b und ist wiederum verklebt mit dem linken Endpunkt von c usw. Betrachtet man den Grenzwert dieses Verhaltens, so ist der linke Rand von a verklebt mit der oberen linken Ecke und der unteren rechten Ecke, woraus man schließlich erkennt, dass alle Ecken verklebt sind. Diese Endpunkte sind anscheinend besonders, definieren wir sie also informell.

Definition 2.3. Singularität

Bei der Verklebung einer Translationsfläche bezeichnen wir die Endpunkte der verklebten Strecken als Singularitäten.

Die Chamanara-Fläche hat also genau eine Singularität. Spannend in Bezug auf die Singularität ist ihre Umgebung. Im Kontrast zur restlichen Fläche, hat die Singularität keine "einfache" Umgebung. Dabei hat ein Punkt genau dann eine "einfache" Umgebung, wenn es eine ausreichend kleine Umgebung um ihn herum gibt, so dass diese durch stetige Abbildungen in eine Kreisscheibe umgeformt werden kann.

Läuft man aber in einem Kreis um die Singularität der Chamanara-Fläche, so muss man unendlich oft entlang der verklebten Stellen "springen", also unendlich oft im Kreis rumlaufen, bis man wieder den Kreis schließt. So ein Verhalten gibt es auf der Kreisscheibe nicht. Also hat die Singularität keine "einfache" Umgebung.

Anhand der Verklebung können wir nicht nur Singularitäten, sondern auch andere Objekte festmachen. Eine der natürlichsten Überlegungen bei einer solchen Verklebung ist die Frage: Was passiert, wenn man selbst auf der Fläche entlang läuft? Die mathematische Überlegungen in diesem Kontext ist der Verlauf einer geraden Linie auf der Fläche.

Definition 2.4. Geodätische

Das Verlauf eines Strahls auf einer Translationsfläche ist eine Geodätische. Eine Geodätische ist also ein zusammenhängender Verlauf, der lokal geradlinig ist und an verklebten Stellen seine Richtung beibehält (siehe Abbildung 3).

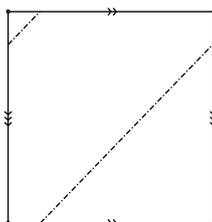


Abbildung 3: Eine geschlossene Geodätische auf dem Torus.

Definition 2.5. Sattelverbindung

Besondere Geodätischen, die in Singularitäten beginnen und enden und keine weitere Singularitäten enthalten, nennen wir Sattelverbindungen.

Mehrere Geodätischen, die sehr nahe aneinander liegen, haben ein interessantes Verhalten. Oft sind die Geodätischen sehr ähnlich und verlaufen ständig parallel. Dies - verknüpft mit der Möglichkeit, dass Geodätischen, wie in Abbildungen 3 geschlossen sind - liefert ein weiteres Objekt.

Definition 2.6. Zylinder

Eine Menge paralleler, benachbarter, geschlossener und gleich langer Geodätischen, nennen wir einen Zylinder.

Zylindern können wir einige Eigenschaften zuordnen.

Definition 2.7. Zylinder Höhe, Umfang und Modul

Der Abstand zwischen den Rändern eines Zylinders ist seine Höhe. Die Länge seiner Geodätischen ist sein Umfang. Der Quotient aus Umfang und Höhe ist sein Modul.

Vor allem der Modul, wie der Titel dieser Arbeit andeutet, wird später eine große Bedeutung haben. Der Modul ist ein Maß der Proportionen des Zylinders.

Auf einer einzelnen Translationsfläche können natürlich mehrere Zylinder vorkommen. Mehrere Zylinder haben vor allem dann eine schöne Struktur, wenn sie eine Fläche vollständig bedecken bzw. die Fläche in Zylinder zerlegt wird.

Definition 2.8. Zylinderzerlegung

Die vollständige Bedeckung einer Fläche durch maximale und parallele Zylinder, sowie deren Ränder, heißt Zylinderzerlegung (siehe Abbildung 4).

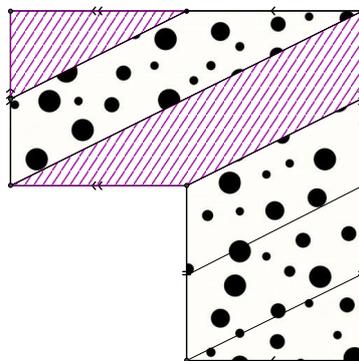


Abbildung 4: Zylinderzerlegung einer Translationsfläche.

Jetzt kommen wir in den Bereich der Algebra und schauen uns an, was für besondere Abbildungen auf Zylindern möglich sind.

Definition 2.9. Affine Abbildung

Die Verkettung einer Translation und einer linearen Abbildung (der üblichen Aktion einer Matrix) heißt affin.

Definition 2.10. Lokal affine Abbildung

Eine Selbstabbildung einer Fläche heißt lokal affin genau dann, wenn jeder Punkt in einer Umgebung liegt, die affin abgebildet wird.

Bei einer lokal affinen Abbildungen auf einer Translationsfläche kann man zeigen, dass die Abbildungen zweier sich schneidender Umgebungen den gleichen linearen Anteil haben und sich höchstens in der Translation unterscheiden. Somit kann man von jedem Punkt zu jedem anderen Punkt - entlang sich schneidender Umgebungen - gelangen und den linearen Teil gleich lassen. Damit ist gezeigt, dass die lineare Matrix einer lokal affinen Abbildungen eindeutig ist.

Definition 2.11. Ableitung einer lokal affinen Abbildung

Die eindeutige lineare Abbildung bzw. die Matrix einer lokal affinen Abbildung bezeichnen wir als die Ableitung der Abbildung.

Definition 2.12. Veech-Gruppe Γ

Die Menge der Ableitungen aller lokal affiner und orientierungserhaltender Abbildungen einer Translationsfläche nennen wir die Veech-Gruppe.

Orientierungserhaltung erfolgt genau dann, wenn die Ableitung positive Determinante hat.

Auf Flächen mit endlicher Fläche muss der Flächeninhalt gleich bleiben, die Ableitung jeder Abbildung muss also Determinante 1 haben.

Wir betrachten dazu zuerst lokal affine Abbildungen auf Zylindern.

Für einen Zylinder mit Höhe h und Umfang w , welchen wir darstellen als einfach verklebtes Rechteck, betrachten wir die Aktion von $\begin{pmatrix} 1 & \frac{w}{h} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dabei wählen wir die untere linke Ecke als Ursprung. Der untere Rand bleibt unverändert. Der obere Rand wird geschert um einen Faktor $h \cdot \frac{w}{h} = w$. Auf Grund der Translationsstruktur oder Verklebung des Rechtecks wird der obere Rand punktweise auf sich selbst abgebildet. Das Innere des Zylinders wird auch auf sich selbst abgebildet, aber nicht punktweise. Man muss dazu nur die Abbildung des linken Randes auf eine Art diagonale Spirale betrachten (siehe Abbildung 5). Diese Aktion nennen wir Dehn-Twist.

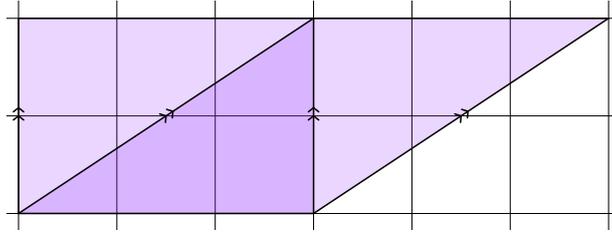


Abbildung 5: Einfacher Dehn-Twist auf einem Zylinder.

Ein Zylinder kann mehrmals geschert bzw. "getwistet" werden. Damit können wir, wie in Abbildung 6 zu sehen ist, mehrere verschiedene Zylinder gleichzeitig scheren. Dazu muss nur gewährleistet sein, dass eine Zahl d existiert, die angibt, um wie viel jeder Zylinder geschert werden soll. Die Zahl d muss also ein natürliches Vielfaches jedes Zylindermoduls sein.

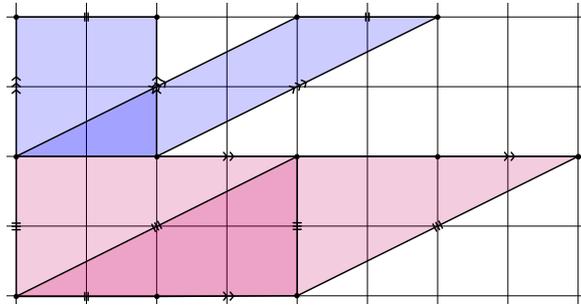


Abbildung 6: Mehrfache Dehn-Twists auf Zylindern.

Die Eigenschaft, dass ein solches d existiert, ist nicht automatisch gegeben. Hat man einen Zylinder mit Modul $\sqrt{2}$ und einen anderen mit Modul 2, so ist deren Verhältniss nicht rational und ein gleichzeitiger Dehn-Twist ist nicht möglich. Diese notwendige Eigenschaft von d wird eine wichtige Rolle spielen.

Definition 2.13. Kommensurabel

Eine Menge an reellen Zahlen ist genau dann kommensurabel, wenn es eine Zahl d gibt, die ein natürliches Vielfaches aller Zahlen der Menge ist.

Verallgemeinert bemerken wir, dass man jeder Zylinderzerlegung einer Translationsfläche, deren inverse Zylindermoduln $\frac{h_k}{w_k}$ kommensurabel sind (also natürliche Teiler von n sind), eine lokal affine Abbildung zuordnen kann, deren Ableitung konjugiert zu $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist und damit in der Veech-Gruppe liegt (siehe [2]). Die Abbildung agiert auf den Zylindern als Dehn-Twist. Dies beruht auf unseren Überlegungen für endlich viele Zylinder und

darauf, dass wir für nicht horizontale Zylinder die Matrix des Dehn-Twists durch eine Rotationsmatrix ergänzend konjugieren können.

Umgekehrt gibt es zu jedem "drehenden" Element der Veech-Gruppe eine Zylinderzerlegung.

Der Begriff "drehend" ist noch etwas vage, präzisieren wir also unsere Begrifflichkeit durch eine Klassifizierung anhand der Ableitung der Abbildung.

Definition 2.14. Parabolisch, Elliptisch und Hyperbolisch

Eine nicht triviale lokal affine Abbildung auf einer endlichen Translationsfläche nennen wir genau dann parabolisch, elliptisch oder hyperbolisch, wenn der Betrag der Spur ihrer Ableitung gleich 2, kleiner 2 oder größer 2 ist.

Parabolische Elemente wirken "drehend".

Jedes parabolische Element kann man konjugieren zu der Form $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Jedes hyperbolische Element kann man konjugieren zu der Form $\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}, \gamma \in \mathbb{R}_{>1}$.

Jedes elliptische Element kann man konjugieren zu $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, b \neq 0, a^2 + b^2 = 1$.

Um diese scheinbar willkürliche Klassifizierung besser zu verstehen, betrachten wir eine andere Aktion von Matrizen.

Definition 2.15. Möbius-Transformation

Die Aktion einer Matrix $M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und Determinante 1) auf die komplexe Zahlen \mathbb{C} und unendlich ∞ unter der Vorschrift $M \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$ nennen wir Möbius-Transformation.

Betrachtet man jetzt die Aktion der Repräsentanten der drei verschiedenen Abbildungstypen, so erkennt man charakteristische Verhalten.

Ein parabolischen Element verschiebt die komplexe Zahlenebene $z \mapsto \frac{1 \cdot z + n}{0 \cdot z + 1} = z + n$.

Ein hyperbolisches Element streckt die komplexe Zahlenebene $z \mapsto \frac{\gamma \cdot z + 0}{0 \cdot z + \frac{1}{\gamma}} = \gamma^2 \cdot z$.

Die Klassifizierung anhand der Spur kann man auch erkennen an den Fixpunkten $c \neq 0$:

$$\begin{aligned} z &= M \cdot z \Leftrightarrow \\ z &= \frac{az + b}{cz + d} \Leftrightarrow \\ cz^2 + (d - a)z - b &= 0 \Leftrightarrow \\ z_{1/2} &= \frac{a - d}{2c} \pm \frac{1}{2c} \sqrt{(a - d)^2 + 4bc} \\ &= \frac{a - d}{2c} \pm \frac{1}{2c} \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)} \end{aligned}$$

Hier ist $a+d$ die Spur und $ad-bc=1$ die Determinante. Die Diskriminante der Gleichung ist also die Spur im Quadrat minus 4. Man erkennt schnell, dass die 3 verschiedenen Fälle an Abbildungen verschiedene Diskriminanten und damit Fixpunkte haben.

Bei parabolischen Elementen ist der Betrag der Spur der Matrix 2, die Diskriminante 0 und es gibt genau einen reellen Fixpunkt.

Bei hyperbolischen Elementen ist der Betrag der Spur der Matrix größer als 2, die Diskriminante positiv und es gibt zwei reelle Fixpunkte.

Bei elliptischen Elementen ist der Betrag der Spur kleiner als 2, die Diskriminante negativ und es gibt zwei nicht reelle Fixpunkte, die zueinander komplex konjugiert sind.

Möbius-Transformationen haben eine Vielzahl nützlicher Eigenschaften. Der vermutlich wichtigste Zusammenhang ist zwischen der Aktion von Matrizen als lineare Abbildung und als Möbius-Transformation zu finden. Es gilt nämlich für zwei Matrizen M, N , dass $M(N(z))$ als Möbius-Transformation gleich $M \cdot N(z)$ mit der Matrizenmultiplikation ergibt. Dies können wir kurz für den allgemeinsten Fall nachweisen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot u + b \cdot w & a \cdot v + b \cdot x \\ c \cdot u + d \cdot w & c \cdot v + d \cdot x \end{pmatrix}.$$

$$\frac{a \cdot \frac{u \cdot z + v}{w \cdot z + x} + b}{c \cdot \frac{u \cdot z + v}{w \cdot z + x} + d} = \frac{a \cdot (u \cdot z + v) + b \cdot (w \cdot z + x)}{c \cdot (u \cdot z + v) + d \cdot (w \cdot z + x)} = \frac{(a \cdot u + b \cdot w)z + a \cdot v + b \cdot x}{(c \cdot u + d \cdot w)z + c \cdot w + d \cdot x}.$$

Wir können also zwischen den zwei verschiedenen Aktionen wechseln.

Diesen Wechsel führen wir durch, um Vorteile beider Aktionen zu nutzen.

Definition 2.16. Obere Halbebene \mathbb{H}

Die komplexen Zahl mit positiven komplexen Anteilen, also $\{z \in \mathbb{C}, \text{Im}(z) > 0\}$ bezeichnen wir als die obere Halbebene \mathbb{H} .

Vor allem vorteilhaft bei Möbius-Transformationen ist ihre Aktion auf der oberer Halbebene. Zum einen wird die obere Halbebene auf sich selbst abgebildet (da die Determinante der Matrix 1 ist). Zusätzlich haben Gruppen an Matrizen oft ein schönes Verhalten auf \mathbb{H} , das man in bestimmten Strukturen darstellen kann.

Definition 2.17. Fundamentalbereich

Eine Teilmenge F von \mathbb{H} ist ein Fundamentalbereich der Gruppe G an Möbius-Transformationen, genau dann wenn: a) $\forall g \in G, g \neq id : g \cdot F \cap F = \emptyset$, b) $\bigcup_{g \in G} g \cdot \bar{F} = \mathbb{H}$ (wobei \bar{F} den Abschluss von F bezeichnet).

Grob gesagt ist der Fundamentalbereich eine Teilmenge von \mathbb{H} , die unter den Aktionen von G ganz \mathbb{H} mit disjunkten Teilmengen überdeckt.

Zwei wichtige Theoreme, die wir nutzen aber nicht beweisen, sind:

Erstens Poincarés Theorem [3]: Hat man eine Gruppe G , dessen erzeugende Elemente die Seiten eines hyperbolischen Polyeders (Polyeder, wobei Geraden im hyperbolischen Raum definiert sind) paarweise aufeinander abbilden, so ist dieser Polyeder ein Fundamentalbereich von G .

Zweitens: Genau dann, wenn eine Gruppe diskontinuierlich auf einer bestimmten Nachbarschaft wirkt, hat sie einen Fundamentalbereich bzw. ist eine Fuchssche Gruppe. "Diskontinuierlich auf einer Umgebung wirken" heißt grob gesagt "in der Umgebung keine Fixpunkte oder Häufungspunkte haben". Diese Tatsache kann man sich erklären, indem man die Konstruktion eines Fundamentalbereichs anschaut. Hier betrachtet man die Bilder eines Punktes P unter der Gruppe G und bildet die Teilmenge aller Punkte, die näher an P liegen als an den Bildern von P . Diese Konstruktion, heißt Methode von Dirichlet, ist aber nur möglich, wenn um P kein Häufungspunkt und kein Fixpunkt liegt.

Definition 2.18. Fuchssche-Gruppe

Eine Gruppe an Möbius-Transformationen, die einen Fundamentalbereich besitzt bzw. diskontinuierlich auf eine Umgebung wirkt, nennen wir eine Fuchssche Gruppe.

Mit diesen Mitteln können wir jetzt mit dem Beweisen beginnen.

3 Zusammenfassung von "Notes on the Veech Group of the Chamanara surface" [1] von Frank Herrlich und Anja Randecker

Wir erinnern uns daran, dass zu jeder Zylinderzerlegung, deren Zylindermoduln kommensurabel sind, ein parabolisches Element in der Veech-Gruppe Γ liegt.

Die Berechnung einiger konkreter parabolischer Elemente P_1, P_2 erfolgt so:

Man betrachtet die einfachen Zylinderzerlegungen C_1 mit Steigung 1 und C_2 mit Steigung 2 und die entsprechende parabolische Elemente. Zur Vereinfachung rotiert man die Fläche, so dass die Diagonale, der man bisher Steigung 1 zuordnete, jetzt horizontal ist. Die Richtung von C_1 ist also horizontal. Man erkennt, dass die längste diagonale Sattelverbindung in C_1 $\sqrt{2}$ und die zwei zweitlängsten Sattelverbindungen $\frac{\sqrt{2}}{2}$ lang sind. Somit hat der größte Zylinder in C_1 den Umfang $\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$. Die Höhe dieses Zylinders ist ein Viertel der vertikalen Diagonale auf dem Einheitsquadrat, hat also die Länge $\frac{\sqrt{2}}{4}$. Der Modul des größten Zylinders in C_1 ist $6 = \frac{\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{4}\sqrt{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{1}$. Da alle Zylinder in C_1 ähnlich sind, liegt ein parabolisches Element der Form $P_1 := \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in Γ . Da P_1 die Zylinder von C_1 genau einmal dreht, muss jedes parabolische Element mit horizontaler Eigenrichtung die Aktion von P_1 eine natürliche Anzahl an Malen ausführen, also eine Potenz von P_1 sein.

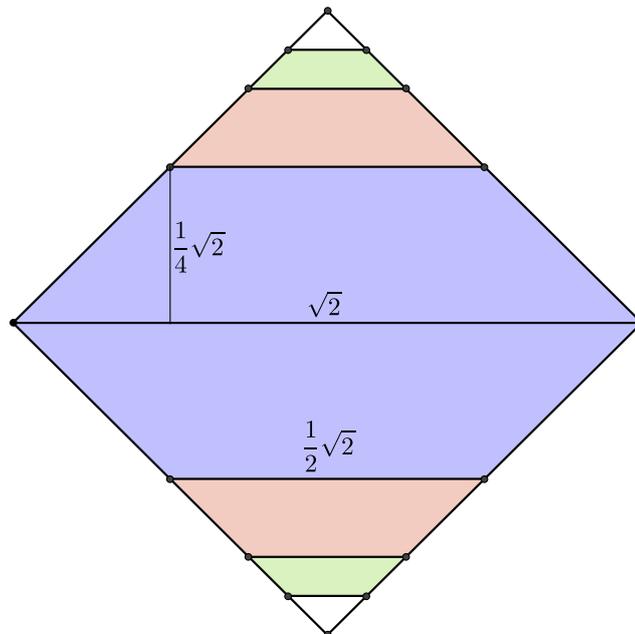


Abbildung 7: C_1

Bei C_2 gibt es zwei verschiedene Zylindermoduln. Wir bestimmen die Länge der längsten Sattelverbindung mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks und des Satzes des Pythagoras. Das Dreieck hat Katheten der Längen $\frac{1}{4}\sqrt{2}$ und $\frac{3}{4}\sqrt{2}$ und damit eine Hypotenuse bzw. Sattelverbindung der Länge:

$$\sqrt{\frac{3^2 \cdot 2}{4^2} + \frac{2}{4^2}} = \sqrt{\frac{20}{4^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Die Höhe des mittleren Zylinders bestimmen wir wieder über ein rechtwinkliges Dreieck. Dieses Dreieck ist ähnlich zu den Dreiecken, die wir aus Sattelverbindungen und Eckpunkten des Quadrats bilden können, so dass die gesuchte Kathete doppelt so lang ist, wie die zweite Kathete. Die Hypotenuse hat Länge $\frac{1}{2}$, so dass für die Höhe h_{C_2} gilt:

$$\sqrt{(h_{C_2})^2 + \frac{1}{4}(h_{C_2})^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5}{4}(h_{C_2})^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow h_{C_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Damit hat der mittlere Zylinder den Umfang $\frac{1}{2}\sqrt{5}$, die Höhe $\frac{1}{\sqrt{5}}$ und damit den Modul $\frac{5}{2} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{5}}{\frac{1}{\sqrt{5}}}$. Alle anderen Zylinder haben den Umfang $\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\sqrt{5}$, die Höhe $\frac{1}{2\sqrt{5}}$ und damit den Modul $\frac{15}{2} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\sqrt{5}}{\frac{1}{2\sqrt{5}}}$. Man muss weiter beachten, dass C_2 nicht waagrecht ausgerichtet ist, sondern um einen Winkel α gedreht ist. Daher berechnen wir, dass $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ und daher $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Unter Verwendung einer Rotationsmatrix, ist das zu C_2 entsprechende parabolische Element:

$$P_2 := \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -5 & 27 \\ -3 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{15}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}.$$

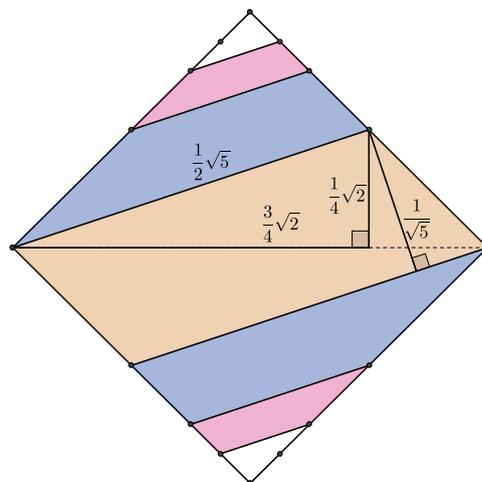


Abbildung 8: C_2

Es sei G die von P_1 und P_2 erzeugte Gruppe. Ein wichtige Bemerkung, die für P_1 gezeigt wurde und für P_2 gleichermaßen gilt ist, dass jedes parabolische Element in der Veech-Gruppe mit gleicher Eigenrichtung wie P_1 oder P_2 eine Potenz von P_1 oder P_2 ist.

Im Folgenden behandeln wir die Aktionen der Elemente von $SL(2, \mathbb{R})$ als Möbius-Transformationen auf der oberen Halbebene \mathbb{H} . Wir konstruieren einen Fundamentalbereich $F_1 = \{z \in \mathbb{H} \mid -3 < \operatorname{Re}(z) < 3\}$ von $[P_1]$, wobei $[P_1]$ die von P_1 erzeugte Gruppe an Möbius-Transformationen ist. Dies gilt, da P_1 um 6 in die horizontale Richtung verschiebt, d.h. $z \mapsto \frac{z+6}{0z+1}$.

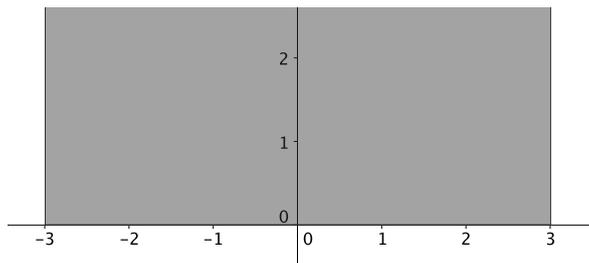


Abbildung 9: F_1 , Bild stammt aus [1]

Danach konstruieren wir mit Hilfe der Methode von Dirichlet einen Fundamentalbereich F_2 von $[H] := [P_2 \cdot P_1]$, indem man

$$H = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -5 & 27 \\ -3 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

mit einer Matrix $M := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ diagonalisieren zu

$$U := M^{-1}HM = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Die Gruppe $[U]$ hat einen Fundamentalbereich $A := \{z \in \mathbb{H} \mid \frac{1}{2} < |z| < 2\}$, da $z \mapsto \frac{2z}{0.5} = 4z$.

Wir zeigen, dass $M \cdot A$ ein Fundamentalbereich von $[H]$ ist.

- a) $\forall k \in \mathbb{N} : U^k \cdot A \cap A = \emptyset \Rightarrow$
 $(M^{-1}H^kM \cdot A) \cap A = \emptyset \Rightarrow (H^k \cdot M \cdot A) \cap (M \cdot A) = \emptyset.$
- b) $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} (U^i \cdot \bar{A}) = \mathbb{H} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} (M^{-1}H^iM \cdot \bar{A}) = \mathbb{H} \Rightarrow$
 $M^{-1} \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} (H^iM \cdot \bar{A}) = \mathbb{H} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} (H^iM) \cdot \bar{A} = M \cdot \mathbb{H} = \mathbb{H}.$

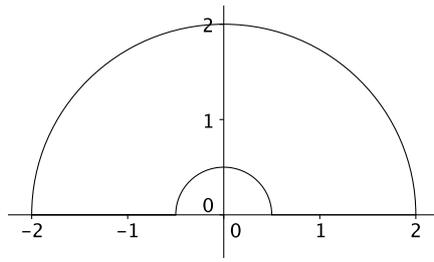


Abbildung 10: A , Bild stammt aus [1]

Somit erfüllt $F_2 = M \cdot A$ beide Bedingungen eines Fundamentalbereichs von $[H]$.

Betrachtet man die Abbildung der reellen Eckpunkte $-2, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 2$ von A unter M , so kann man die Eckpunkte $-3, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, 3$ von F_2 finden. Das Bild eines Punktes $i \in A$ lässt uns das grobe Bild von F_2 erstellen, mit dem wir arbeiten. Dabei ist wichtig zu bemerken, dass $\overline{F_2} \cap (\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \{\infty, z \in \mathbb{R} \mid |z| < \frac{1}{3} \vee |z| > 3\}$.

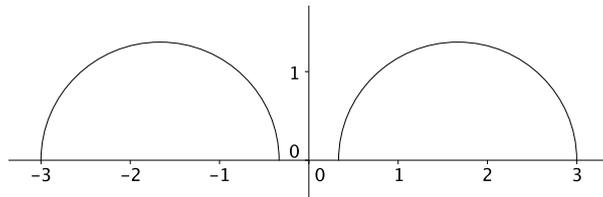


Abbildung 11: F_2 , Bild stammt aus [1]

Wir konstruieren schließlich ein Fundamentalbereich $F_G = F_1 \cap F_2$ von G als Schnitt der zwei einzelnen Fundamentalbereiche. Um zu zeigen, dass F_G wirklich ein Fundamentalbereich von G ist, zitieren wir Poincarés Satz [3] und nutzen dabei die Bemerkung, dass H und P_1 die Kanten von F_G paarweise aufeinander abbilden.

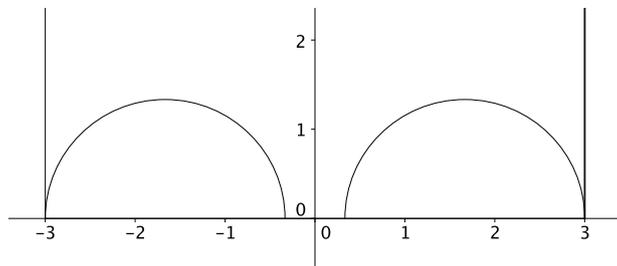


Abbildung 12: F_G , Bild stammt aus [1]

Wir betrachten die Eigenrichtungen von parabolischen Elementen mit Fixpunkten in $(-1, 1)$.

Für $N := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $\text{Spur}(N) = a + d = 2$ und $\det(N) = ad - bc = 1$ lösen wir die Fixpunktgleichung:

$$\begin{aligned} z &= N \cdot z \Leftrightarrow \\ z &= \frac{az + b}{cz + d} \Leftrightarrow \\ cz^2 + (d - a)z - b &= 0 \Leftrightarrow \\ z_{1/2} &= \frac{a - d}{2c} \pm \frac{1}{2c} \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)} \\ &= \frac{a - d}{2c}. \end{aligned}$$

Es sei $z \in \mathbb{R}$ der Fixpunkt von N .

Somit gilt:

$$\begin{aligned} d &= 2 - a, \text{ da } \text{Spur}(N) = 2, \\ c &= \frac{a - 1}{z}, \text{ da } \frac{a - 1}{c} = \frac{a - d}{2c} = z, \\ b &= \frac{z(a(2 - a) - 1)}{a - 1} = -z(a - 1), \text{ da } \det(N) = a(2 - a) - b \frac{a - 1}{z} = 1. \end{aligned}$$

Deshalb ist $N = \begin{pmatrix} a & -(a - 1)z \\ \frac{a - 1}{z} & 2 - a \end{pmatrix}$ mit Eigenvektor $\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$. Hier erkennt man, dass nur bei $|z| > 1$ der Winkel der Eigenrichtung zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{4}$ liegt. Wir schließen diesen Fall am Beispiel einer beliebigen Zylinderzerlegung mit einer Steigung größer als $\frac{\pi}{4}$ aus. Betrachtet man in diesem Fall die Geodätischen ausgehend von den Singularitäten in der oberen Ecke, so strebt deren Länge nicht gegen null. Da diese Geodätischen eine Zylinderzerlegung liefern, sind sie geschlossen und damit Sattelverbindungen. Ausgehend vom Häufungspunkt an Singularitäten in der oberen Ecke, entsteht eine "Häufungslinie" h_l positiver Länge an Sattelverbindungen, die innerhalb eines Zylinders liegt oder ein Zylinderrand ist. Dieser Zylinder hat positive Höhe und muss nach der Definition eines Häufungspunktes eine weitere Sattelverbindung in seinem Inneren enthalten - ein Widerspruch. Somit kann ein parabolisches Element in der Veech-Gruppe keinen Fixpunkt in $(-1, 1)$ haben.

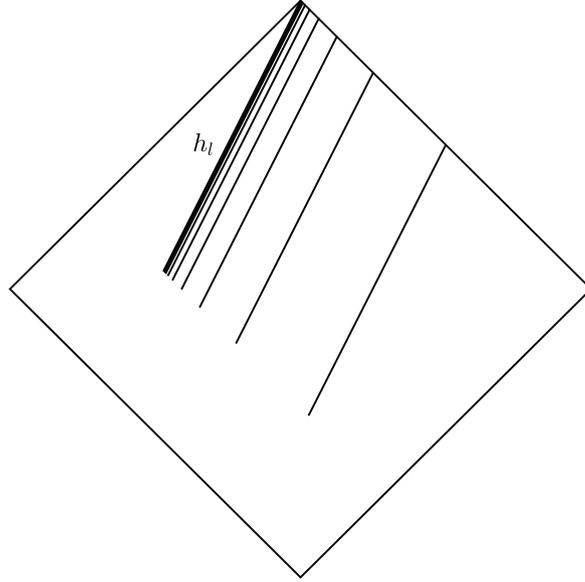


Abbildung 13: "Häufunglinie" h_l , Bild stammt aus [1]

Wir zeigen zusätzlich noch, dass neben den parabolischen Elementen, alle Elemente der Veech-Gruppe keine Fixpunkte in $(-1, 1)$ haben. Wir müssen also noch die hyperbolischen Elemente betrachten. Nehmen wir an, dass es ein hyperbolisches Element $W \in \Gamma$ mit anziehendem Fixpunkt $x \in (-1, 1)$ gibt. Es sei $f_2 \in \mathbb{R}$ der Fixpunkt von P_2 . Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $h^n(f_2) \in (-1, 1)$. Dies ist ein Widerspruch, da $h^n(f_2)$ der Fixpunkt der parabolischen Abbildung $h^n P_2 h^{-n}$ ist.

Somit wirkt Γ diskontinuierlich auf $(-1, 1)$, ist eine Fuchssche Gruppe und hat einen Fundamentalbereich $F_\Gamma \subset F_G$.

Wir betrachten eine beliebige parabolische Abbildung $A \in \Gamma$ mit Fixpunkt c_1 . Da Γ einen Fundamentalbereich hat und c_1 als Fixpunkt in der Limesmenge von Γ enthalten ist, muss c_1 im Abschluss eines Fundamentalbereiches $F'_\Gamma = \mu \cdot F_\Gamma, \mu \in \Gamma$ enthalten sein. Somit existiert ein $g \in G$ mit $g \cdot c_1$ im Abschluss von F_G . Dabei ist $g \cdot c_1$ der Fixpunkt der parabolischen Abbildung $J_1 := g A g^{-1}$. Somit gilt für $g \cdot c_1$: $g \cdot c_1 \in \overline{F_G}, g \cdot c_1 \in \mathbb{R}, g \cdot c_1 \notin (-1, 1)$. Wir sehen durch Betrachtung von F_G , dass $g \cdot c_1 \in \{-3, 3, \infty\}$. Durch passende Wahl von g erreichen wir, dass $g \cdot c_1 \in \{3, \infty\}$ und damit J_1 den Fixpunkt 3 oder ∞ hat. Daraus folgt, dass J_1 den gleichen Fixpunkt hat, wie P_1 oder P_2 und J_1 die gleiche Eigenrichtung, wie P_1 oder P_2 hat. Hat P_1 die gleiche Eigenrichtung, wie J_1 , dann wirkt J_1 als Dehn-Twist auf C_1 , muss jeden Zylinder mindestens einmal "twisten" und muss somit eine Potenz von P_1 sein. Man kann gleichermaßen vorgehen, wenn J_1 und P_2 die gleiche Eigenrichtungen haben. Zusammengefasst wurde gezeigt, dass jedes parabolische Element in Γ zu einer Potenz von P_1 oder P_2 konjugiert ist.

Wir zeigen noch eine Aussage, die in meinem Beweis nicht genutzt wird, aber die Inspiration des Beweises und eigentliche Grundaussage der obigen Veröffentlichung ist.

Betrachtet man eine beliebige Abbildung $A \in \Gamma$, so konstruieren wir für $i \in \{1, 2\}$ das parabolische Element $A^{-1}P_iA$ mit Fixpunkt c_2 . Gleichmaßen wie im vorherigen Abschnitt gibt es eine Abbildung $g \in G$, so dass $g \cdot c_2 \in \{3, \infty\}$ und $g \cdot c_2$ der Fixpunkt von $J_2 := gA^{-1}P_iAg^{-1}$ ist. Somit ist J_2 gleich einer Potenz von P_1 oder P_2 . Betrachten wir o.B.d.A. den Fall, dass $i = 1$. P_1 kann zu keiner nicht trivialen Potenz von sich selbst konjugiert sein, da P_1 die Aktion als Dehn-Twist auf C_1 mehrmals ausführt und eine Potenz von P_1 den Dehn-Twist mehrmals ausführt. P_1 kann ebenfalls nicht zu einer Potenz von P_2 konjugiert sein, da die entsprechenden Zylinderzerlegungen völlig verschiedene Zylinder enthalten. C_1 hat im Kontrast zu C_2 einen Zylinder, der von 3 Sattelverbindungen begrenzt wird. Diese Eigenschaft bleibt unter Konjugation invariant. Somit ist $J_2 = P_1$. Die gleiche Aussage kann man für $i = 2$ zeigen, so dass $gA^{-1}P_iAg^{-1} = P_i, i \in \{1, 2\}$ gilt. Damit muss gA^{-1} mit P_1 und P_2 kommutieren. Dies ist nur möglich, wenn $gA^{-1} \neq id$ mit P_1 und P_2 die gleiche Menge an Fixpunkten hat, ein Fakt der offensichtlich nie stimmt, da P_1 und P_2 verschiedene Fixpunkte haben. Somit ist $gA^{-1} = id$ und daher ist $A \in G$. Also ist $G = \Gamma$ und die Veech-Gruppe der Chamanara-Fläche wird erzeugt von $\{P_1, P_2\}$.

4 Zylindermoduln der Chamanara-Fläche

Es sei X die Chamanara-Fläche. Es sei Γ die Veech-Gruppe von X . Es sei Ω die Menge der parabolischen Abbildungen. Falls nichts weiteres angegeben ist, so sei r die Richtung einer Zylinderzerlegung (wir nehmen o.B.d.A an, dass $r \geq 1$).

Theorem 1. Eine Zylinderzerlegung der Chamanara-Fläche hat höchstens zwei verschiedene Zylindermoduln.

Lemma 2. Es gibt nur endlich viele verschiedene Moduln von Zylindern einer Zylinderzerlegung von X .

Beweis. Wir teilen ein Quadrat auf in die Vereinigung B der zwei Dreiecke und das Parallelogramm A , die voneinander getrennt werden durch Strecken in Richtung r zwischen der unteren linken Ecke bzw. der oberen rechten Ecke und dem oberen Rand bzw. dem unteren Rand. Wir verkleben das Quadrat zu X (dabei sind Häufungspunkte von Singularitäten in der oberen linken und unteren rechten Ecke) und übertragen damit die Definition von B und A auf X .

Alle Zylinder, die nur in B liegen, sind durch Streckung ineinander überführbar und haben somit den gleichen Modul. Gäbe es unendlich viele Sattelverbindungen in A , so gäbe es einen Häufungspunkt dieser Sattelverbindungen (alle gleicher Länge > 1), welcher entweder in einem Zylinder liegt oder der Rand eines Zylinders ist. In beiden Fällen muss eine weitere Sattelverbindung näher an dem Häufungspunkt liegen und im Inneren eines Zylinders verlaufen, ein Widerspruch. Somit gibt es nur endlich viele Zylinder in A und somit endlich viele verschiedene Zylindermoduln. \square

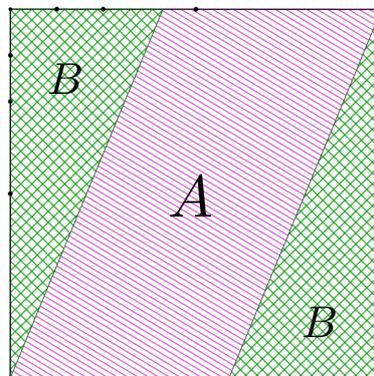


Abbildung 14: A und B

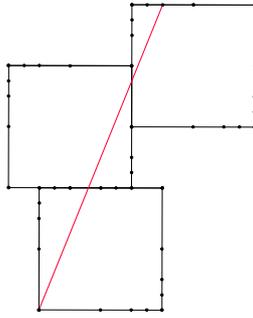


Abbildung 15: Strahl in Richtung r

Lemma 3. Richtung r hat rationale Steigung (bezüglich des unteren Rands von X).

Beweis. Ein Strahl mit Richtung r aus einer Singularität, muss nach endlichem Abstand eine weitere Singularität erreichen. Man kann den Strahl darstellen als eine Strecke durch eine Reihe aneinander geklebter Quadrate, wobei ein Punkt genau dann als Element der Strecke auf einem Quadrat auftritt, wenn der Punkt am entsprechenden Ort auf X auf dem Strahl liegt. Das Verkleben von Quadraten erfolgt jeweils entlang von Abschnitten, die bei der C.-Fläche verklebt werden. So hat der untere Rand jedes Quadrats rationalen Abstand vom unteren Rand des ersten Quadrats. Somit ist der vertikale Abstand zwischen den Enden der Strecke rational. Das gleiche gilt für den horizontalen Abstand und damit für deren Quotient r . \square

Lemma 4. Die Moduln der Zylinder einer Zylinderzerlegung sind kommensurabel.

Beweis. Singularitäten teilen die Ränder in rationalen Verhältnissen, so dass nach Lemma 3 Strahlen, die aus Singularitäten ausgehen, Ränder (verklebte Stellen) in X in einem rationalen Verhältnis schneiden. Stellt man einen Zylinder als Parallelogramm dar mit Basis a und Höhe b und Richtung α , so ist $a, b \in \mathbb{Q}$. Es gilt ebenfalls, dass der Zylinder Umfang $m = \frac{b}{\sin(\alpha)}$ und Höhe $n = a \cdot \sin(\alpha)$ und somit Modul $\left(\frac{1}{\sin(\alpha)}\right)^2 \cdot \frac{b}{a}$ hat. Da es endlich viele verschiedene Zylindermoduln gibt (nach Lemma 2) und alle eine rationale Zahl mal eine Konstante sind, sind alle Zylinder kommensurabel. \square

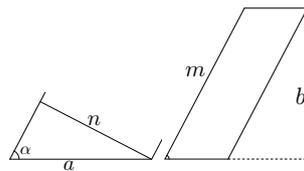


Abbildung 16: Zylinder mit Höhe n und Umfang m

Beweis von Theorem 1. Wiederholen wir das Resultat von Frank Herrlich und Anja Randecker [1], dass alle parabolische Elemente in Γ konjugiert sind zu einer Potenz von P_1 oder einer Potenz von P_2 .

Betrachten wir ein beliebiges Element $\gamma \in \Gamma$. Die Abbildung γ ist lokal affin und Element der Veech-Gruppe. Somit bildet γ Linien auf Linien ab, streckt mit dem gleichen Skalar in eine bestimmte Richtung und bildet Singularitäten auf Singularitäten ab. Somit sind $\gamma(C_1), \gamma(C_2)$ Zylinderzerlegungen, mit einem bzw. 2 verschiedenen Moduln.

Nach [1]: $\forall \delta \in \Gamma \cap \Omega, \exists \gamma \in \Gamma, n \in \mathbb{N} : \gamma \cdot P_1^n \cdot \gamma^{-1} = \delta \vee \gamma \cdot P_2^n \cdot \gamma^{-1} = \delta$. Nehme o.B.d.A. an, dass $\gamma \cdot P_1^n \cdot \gamma^{-1} = \delta$. Da $\delta(\gamma(C_1)) = \gamma \cdot P_1^n \cdot \gamma^{-1}(\gamma(C_1)) = \gamma \cdot P_1^n(C_1) = \gamma(C_1)$, ist $\gamma(C_1)$ die Zylinderzerlegung zu δ . Nach Lemma 4 und [2], existiert zu jeder Zylinderzerlegung ein parabolisches Element $\delta \in \Gamma$. **Somit hat jede Zylinderzerlegung die Form $\gamma(C_1)$ oder $\gamma(C_2)$ und hat höchstens zwei verschiedene Zylindermoduln.** Die Anfangsbehauptung ist somit bewiesen. \square

5 Ausblick

Ich möchte hier zwei Bereiche angeben, welche sich zur weiteren Arbeit anbieten.

Erstens kann man Zwischenergebnisse des Theorems näher untersuchen, um auf der Chamanara-Fläche weitere Zusammenhänge zu finden. Ein interessanter Zwischenschritt ist die bewiesene Bijektion zwischen Zylinderzerlegungen und parabolischen Elementen. Somit sagt die Veech-Gruppe nicht nur etwas über eine kleine Teilmenge aller Zylinder aus, sondern über alle Zylinder. Eine weitere Fragestellung, nämlich die Suche nach allen Eigenrichtungen von Zylinderzerlegungen wird damit deutlich vereinfacht. Man muss jetzt nur die Eigenrichtungen parabolischer Elemente der Veech-Gruppe finden. Diese Suche ist dennoch nicht trivial. Da wir ein Erzeugungssystem der Veech-Gruppe haben, haben wir auch ein Erzeugungssystem aller Eigenrichtungen. Es wäre dennoch schön einige Lücken in unserem Wissen zu schließen. Beispielsweise haben wir noch keine Methode zu kontrollieren, ob eine bestimmte Richtung zulässig für eine Zylinderzerlegung ist.

Zweitens kann man probieren, die Ergebnisse zu verallgemeinern, indem man andere Translationsflächen betrachtet. Der Beweis des Theorems beruht grundsätzlich auf zwei Schritten. Zuerst beweist man elementar-geometrisch, dass alle Zylindermoduln der Chamanara-Fläche kommensurabel sind. Im zweiten Schritt nutzt man die Aktion der Veech-Gruppe, um alle Zylinder aus einigen wenigen zu erzeugen und damit die Zylinder besser zu verstehen. Der erste Schritt lässt sich relativ leicht auf sehr viele verschiedene Translationsflächen verallgemeinern. Im Grunde wird für dieses elementar-geometrische Argument nur gefordert, dass verklebte Abschnitte rationale Längen haben. Deutlich schwieriger wird es beim zweiten Schritt. Hier ist es notwendig einige wenige parabolische Elemente zu finden, welche alle weiteren parabolische Elemente der Veech-Gruppe durch Konjugation in der Veech-Gruppe erzeugen. Der Fund solcher Elemente auf der Chamanara-Fläche war ein schönes Nebenprodukt der Untersuchung der Veech-Gruppe. In diesem Kontext finde ich auch spannend, die Umkehrung des Theorems zu untersuchen bzw. Translationsflächen zu suchen, die n verschiedene Typen an Zylinderzerlegung haben, aber mehr als n erzeugende parabolische Elemente haben, wobei Zylinderzerlegungen mit gleich vielen verschiedenen Zylindermoduln zum gleichen Typ gehören.

6 Danksagung

Die Teilnahme an diesem Projekt war eine große Freude und wertvolle Erfahrung für mich. Für diese Möglichkeit ein Thema so tief zu behandeln, möchte ich einigen Personen danken.

Ich bin Frau Josephine und Herrn Hans-Werner Hector sehr dankbar für die jahrelange Unterstützung begeisterter Jugendlicher im Rahmen des Hector-Seminars. Das angenehme Lernklima - welche nicht nur das Seminar, sondern die gesamte Hector-Stiftung schafft - fördert eine positive Entwicklung in der Mathematik und den Naturwissenschaften.

Meine Betreuer am Hector-Seminar: Frau Anke Richert und vor allem Herrn Thomas Knecht danke ich für Stunden an investierter Zeit und Mühen. Zahlreiche konstruktive Kommentare haben die Qualität dieser Arbeit stark erhöht.

Meine außerordentliche Dankbarkeit möchte ich Frank Herrlich aussprechen. Es ist mir immer noch ein Rätsel, warum und wie er in der Lage war, so viel Zeit mit mir und meinen Fragestellungen zu verbringen. Nur mit Hilfe vieler Stunden an Gesprächen und präzisen Antworten auf meine zahlreiche Fragen konnte ich dieses Thema verstehen.

Dankeschön!

7 Literatur

- [1] Frank Herrlich, Anja Randecker, Notes on the Veech group of the Chamanara surface, 2016, preprint, <https://arxiv.org/pdf/1612.06877.pdf>.
- [2] William A. Veech, Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards, *Inventiones Mathematicae* 97 (1998), no. 3, 553–583.
- [3] Alan F. Beardon, *The geometry of discrete groups*, core. 2. print. ed., Graduate texts in mathematics; 91, Springer, New York, 1995.
- [4] Reza Chamanara, Affine automorphism groups of surfaces of infinite type, In the Tradition of Ahlfors and Bers, III (William Abikoff and Andrew Haas, eds.) *Contemporary mathematics*, vol. 335, 2004, pp.123–145.

Index

- Ableitung einer Abbildung, 6
- Affine Abbildung, 6
- Chamanara-Fläche, 3
- Dehn-Twist, 6
- elliptisches Element, 8
- Fuchssche-Gruppe, 10
- Fundamentbereich, 9
- Geodätische, 4
- Gruppe G , 13
- Höhe eines Zylinders, 5
- hyperbolisches Element, 8
- kommensurabel, 7
- Lokal affine Abbildung, 6
- Modul eines Zylinders, 5
- obere Halbebene \mathbb{H} , 9
- parabolische Abbildungen Ω , 18
- parabolisches Element, 8
- parabolisches Element P_1 , 11
- parabolisches Element P_2 , 11
- Sattelverbindung, 5
- Singularität, 4
- Translationsfläche, 3
- Umfang eines Zylinders, 5
- Veech-Gruppe, 6
- Veech-Gruppe Γ , 11
- Zylinder, 5
- Zylinderzerlegung, 5
- Zylinderzerlegung C_1 , 11
- Zylinderzerlegung C_2 , 11

8 Selbständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, Michael Schmalian, dass diese Arbeit unter der Beratung durch Professor Frank Herrlich von mir selbstständig verfasst wurde und ich keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Ort, Datum

Michael Schmalian