Hector Seminar

Karlsruher Institut für Technologie

Ausbreitung von Gerüchten in sozialen Medien

Abschlussdokumentation der Kooperationsphase 2018/19
Betreut durch Prof. Dr. Nicole Bäuerle
Institut für Stochastik
Karlsruher Institut für Technologie

Leoni Groll
Albert-Braun Straße 14a
76189 Karlsruhe

Samuel Neukirch
Murgstraße 25
76199 Karlsruhe

Inhaltsverzeichnis

Abstract

The aim of the following project work was to model a typical spread of a rumour in social media or any other network. The task concerned about modelling the diffusion mathematically and from the theorethic point of view to exemplify and further calculate the spread of a rumour. Due to the versatility of the affecting factors, it was part of the project to look for several modifications and to compare different models with the objective of a realistic model. The work was about creating mathematical models and calculate spreads with several modifications.

1 Einleitung

Soziale Medien prägen den Informationsaustausch in der heutigen Zeit. Allein Facebook zählt 32 Millionen aktive Mitglieder.
Aus diesem Grund setzen wir uns folgend mit der Informationsübermittlung, der Ausbreitung von Gerüchten mathematisch auseinander.
Dafür werden Modelle aufgestellt, die den Kontakt der Mitglieder zueinander darstellen sollen. Dabei haben wir keine Einsicht in die reellen Strukturen der Netzwerke sondern behandeln das Problem hypothetisch. Anhand der Modelle können wir durch die Berechnung von Zufallswahrscheinlichkeiten Aussagen über das Verhalten der Gerüchte in dem jeweiligen Modell treffen. Diese werden bewertet und verglichen, sodass für weitere Überlegungen an realitätsnäheren Modellen der Weg geebnet wird.

2 Material und Methoden

2.1 Mathematische Grundlagen

Markov-Ketten

Wir verwenden bei unseren Rechnungen das Prinzip der Markov-Ketten. In der Stochastik bezeichnet man verschiedene Zustände. Mit einer festen Wahrscheinlichkeit erreicht bei einer Durchführung des Experiments ein Zustand einen bestimmten anderen. Eine Markov-Kette liegt vor, wenn die Wahrscheinlichkeit von einem Zustand A zu einem Zustand B zu gelangen bei jeder Durchführung gleich groß ist. Jede Durchführung ist folglich unabhängig von der Vorangegangenen. Sobald der Zustand A erreicht ist, erreicht dieser mit fester und gleichbleibender Wahrscheinlichkeit Zustand B.
Aufgrund dieser Eigenschaft lassen sich Markov-Ketten als Matrizen darstellen. Die folgende Übergangsmatrix soll als Beispiel dienen.

$$P_1 = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \end{array} \tag{1}$$

Die Zeile gibt den Ausgangszustand vor einer Durchführung an, die Spalte den Zustand danach. Jedes Feld gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der von dem Zustand der Zeile in den Zustand der Spalte gewechselt wird. In der Beispielmatrix ist die Wahrscheinlichkeit von Zustand C zu Zustand A zu gelangen $p = 0,2$, während die Wahrscheinlichkeit bei einer Durchführung

in Zustand C zu bleiben $p = 0,5$ beträgt. Damit die Matrix stochastisch ist muss die Summe aller Wahrscheinlichkeiten in einer Zeile stets exakt 1 sein, da mit der Wahrscheinlichkeit $p = 1$ nach einer Durchführung ein Zustand erreicht sein muss.
Die Beispielmatrix (1) zeigt die Wahrscheinlichkeiten die bei genau einer Durchführung des Experiments zutreffen. Wird eine Übergangsmatrix mit sich selbst multipliziert, so zeigt die neue Übergangsmatrix die Wahrscheinlichkeiten, die sich bei genau zwei Durchführungen ergeben. Eine Matrix lässt sich folgendermaßen mit sich selbst multiplizieren:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} * b_{11} + a_{12} * b_{21} & a_{11} * b_{12} + a_{12} * b_{22} \\ a_{21} * b_{11} + a_{22} * b_{21} & a_{21} * b_{12} + a_{22} * b_{22} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Nach diesem Prinzip lässt sich auch die Beispielmatrix (1) mit sich selbst multiplizieren.

$$P_1^2 = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,35 & 0,15 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,2 & 0,45 & 0,35 \end{pmatrix} \end{array} \quad (3)$$

Weitergehend kann auch die Übergangsmatrix von 3 bzw. n Durchführungen berechnet werden: $P^3 = P^2 * P$. Dabei muss beachtet werden, dass man maximal 2 Matrizen in einer Rechnung miteinander multiplizieren kann.
Bei Markov-Ketten lassen sich die verschiedenen Zustände in verschiedene Klassen einteilen. Die Zustande i und j liegen in einer Klasse falls $i = j$ oder es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $P_{ij}^n > 0$ und es gibt $m \in \mathbb{N}$ mit $P_{ij}^m > 0$. Wenn es in einer Gruppe von Zuständen möglich ist, von einem Zustand in einen anderen und wieder zurück zu gelangen, so liegen diese Zustände in einer Klasse. In dem oben aufgeführten Beispiel liegen die Zustände A und C in einer Klasse, da man sowohl von Zustand A Zustand C erreichen kann als auch umgekehrt. Zustand B liegt in einer anderen eigenen Klasse, da von B weder A noch C erreicht werden kann.
Die Zustände in einer Klasse heißen rekurrent, falls die Wahrscheinlichkeit die Klasse zu verlassen $p = 0$ beträgt. Sonst nennt man sie transient. Die Klasse bestehend aus Zustand B, ist dementsprechend rekurrent, da mit $p = 1$ dieser Zustand erhalten bleibt. Die andere Klasse bestehend aus Zustand A und C ist hingegen transient, da von Zustand C aus die Klasse mit $p = 0,3$ die Klasse in einer Durchführung Zustand B erreicht und damit die Klasse verlassen wird. Wird dieses Zufallsexperiment beliebig oft durchgeführt, so wird langfristig ein rekurrenter Zustand erreicht. Siehe folgende auf das Beispiel

bezogene Übergangsmatrix, auf zehn Nachkommastellen gerundet.

$$P_1^n = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad , n < 100 \tag{4}$$

Wright-Fischer-Modell

Für unsere eigenen Modelle verwenden wir das Wright-Fischer-Modell, das ursprünglich zur Beschreibung der Ausbreitung von Krankheiten dient. Wir übertragen das Ausbreiten einer Krankheit auf das Ausbreiten von Gerüchten. Die Gruppe, in der sich das Gerücht ausbreitet kann beliebig groß sein, die Anzahl der Teilnehmer bleibt jedoch gleich. Dabei ist die Wahrscheinlichkeit für die einzelnen Teilnehmer, das Gerücht zu übernehmen stets abhängig von dem Anteil der Gruppe, der momentan an das Gerücht glaubt. Sei N die Anzahl der Mitglieder einer Gruppe und x die Anazahl der Mitglieder, die an das Gerücht glauben, so ist p die Wahrscheinlichkeit, an das Gerücht zu glauben

$$p = \frac{x}{N}. \tag{5}$$

Die Berechnung, mit welcher Wahrscheinlichkeit bei der nächsten Durchführung y Personen an das Gerücht glauben, erfolgt mit dieser Formel:

$$\binom{N}{y} p^y (1-p)^{N-y}. \tag{6}$$

2.2 Modelle zur Ausbreitung von Gerüchten

Wir haben insgesamt vier verschiedene Modelle von Netzwerken erstellt. Jedes Netzwerk in den Modellen besteht aus 64 Personen (N=64). Die Gruppen innerhalb eines Modells sind gleich groß und ihre Mitglieder sind von A über AA , BA bis BL gekennzeichnet. Jede Person kann zwei verschiedene Einstellungen haben. Entweder sie glaubt an das Gerücht oder nicht. Die Personen innerhalb einer Gruppe tauschen ihre Meinungen zum Gerücht direkt aus. Bei jedem Zeitschritt beziehungsweise einer Durchführung wird in einer Gruppe nach dem Prinzip des Wright-Fisher-Modells eine Verteilung der Wahrscheinlichkeiten, wie viele Personen innerhalb dieser Gruppe an das Gerücht glauben, aufgestellt.
Zu Beginn glaubt eine Person, in den folgenden Berechnung stets Person A an das Gerücht. Gesucht wird mit welcher Wahrscheinlichkeit sich das Gerücht

zu einer bestimmten Person im Netzwerk ausbreitet. Dafür wird kleinschrittig die Wahrscheinlichkeit für jeden Abschnitt des Weges dorthin berechnet. Zu Beginn breitet sich das Gerücht in der Gruppe der Person A aus. Befindet sich die gewählte Person in dieser Gruppe, kann sich das Gerücht direkt zu ihr ausbreiten. Befindet sie sich in einer anderen Gruppe,wird die Ausbreitung komplexer. Das Gerücht breitet sich in der Startgruppe aus oder wird absorbiert und verschwindet. Sobald mindestens die Hälfte aller Personen in der Gruppe an das Gerücht glaubt, wird die Gruppe als glaubend bezeichnet. Damit kann das Gerücht in eine nächste Gruppe überspringen.
In Modell 1 sind die Gruppen wiederum in Übergruppen unterteilt, welche das Gerücht zu einer einzelnen Person in einer anderen Übergruppe weitergeben könnten, sofern mindestens zwei Gruppen, also mindestens 50 Prozent ihrer Teilnehmer an das Gerücht glauben.
Erreicht das Gerücht die Gruppe, in der sich die Zielperson befindet, so muss es sich dort trotzdem noch einmal nach dem Wright-Fischer Modell ausbreiten, um die Person zu erreichen.
Die Modelle sind in Abbildung 1 dargestellt.

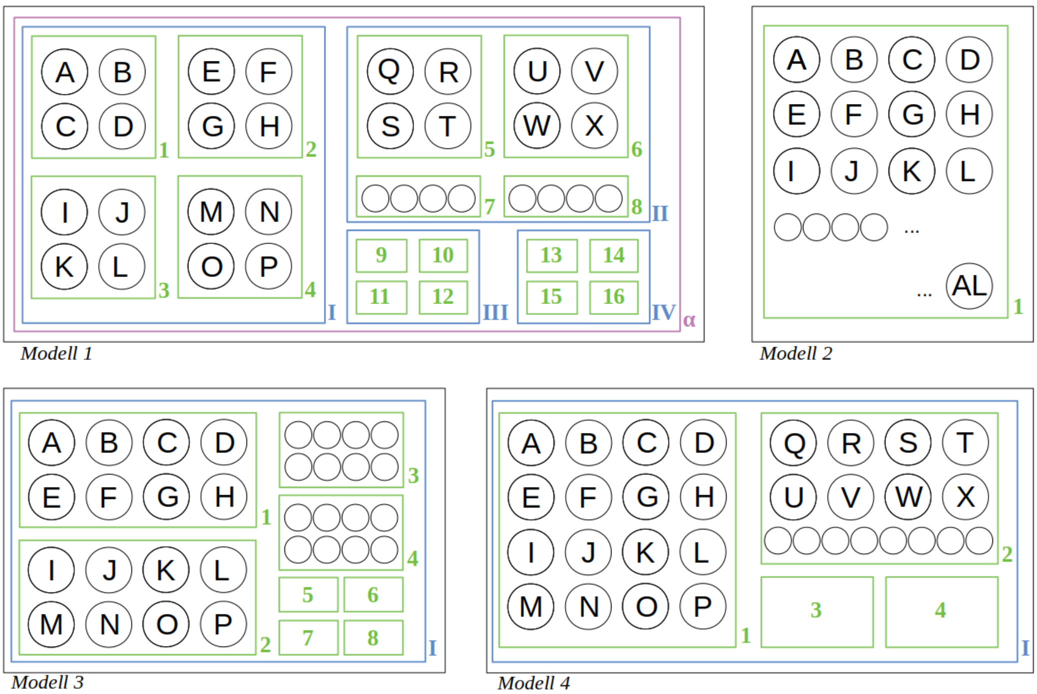

Abb. 1: Die Modelle im Vergleich

2.3 Berechnung Modell 1

Es wird als Endergebnis die Wahrscheinlichkeit gesucht, dass sich das Gerücht zu einer beliebig ausgewählten Person ausbreitet. Die Personen in Modell 1 lassen sich in drei verschieden Kategorien unterteilen. Die Kategorien entstehen aus den Ausbreitungswegen des Gerüchts. Alle Personen, bei denen die Ausbreitung des Gerüchts ähnlich passiert, kommen in eine Kategorie. Demnach sind die Personen B bis D alle in einer Kategorie, da sie sich alle in der Gruppe 1 mit Person A befinden und dadurch den selben Ausbreitungsweg haben. Genauso sind die Personen E bis P alle in einer Kategorie. Sie sind zwar nicht alle in der selben Gruppe, aber das Gerücht erreicht alle diese Personen nur über die Ausbreitung zwischen den Gruppen 1 bis 4 in I. In der letzten Kategorie befinden sich die Personen Q bis BL, also alle anderen. Zu ihnen gelangt das Gerücht ausschließlich über den Austausch zwischen den Übergruppen I bis IV. Im folgenden erfolgt die Berechnung der Wahrscheinlichkeit einer Ausbreitung für die einzelnen Kategorien.

Ausbreitung innerhalb Gruppe 1

Befindet sich die gewählte Person in der Gruppe 1, so wird die Ausbreitungswahrscheinlichkeit wie im folgenden berechnet. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Person in der Gruppe nach einer Durchführung an das Gerücht glaubt beträgt

$$p = \frac{x}{N}. \tag{7}$$

wobei N die Gesamtanzahl der Personen in der Gruppe und x die Anzahl der Personen, die an das Gerücht vor dieser Durchführung glauben angibt. Zu Beginn beträgt die Wahrscheinlichkeit für alle Personen in Gruppe 1 (A bis D) jeweils $p = \frac{1}{4}$. Wird diese für alle Personen zusammen verrechnet ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit das y Personen nach einem Zeitschritt an das Gerücht glauben, wenn zuvor x der N Personen daran glaubten

$$P(x, y) = \binom{N}{y} * (\frac{x}{N})^y * (1 - \frac{x}{N})^{N-y}. \tag{8}$$

Der Binomialkoeffizinet gibt an, wie viele der Personen aus der Gesamtgruppe an das Gerücht glauben werden. Dies ist unabhängig davon welche Personen an das Gerücht glauben. Dieser wird multipliziert mit $(\frac{x}{N})^y$, da y Personen mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{x}{N}$ an das Gerücht glauben werden. Die verbleibenden $N-y$ Personen werden mit der Wahrscheinlichkeit von $(1-\frac{x}{N})$ nicht an das Gerücht glauben.

Formel (8) kann anschließend in jedes Feld der Matrix für das innere System der Gruppe 1 mit vier Personen eingesetzt werden, wobei die verschiedenen Zustände die Anzahl der Personen angeben, die an das Gerücht glauben.

$$Q_1 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{81}{256} & \frac{108}{256} & \frac{54}{256} & \frac{12}{256} & \frac{1}{256} \\ \frac{1}{16} & \frac{4}{16} & \frac{6}{16} & \frac{4}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{256} & \frac{12}{256} & \frac{54}{256} & \frac{108}{256} & \frac{81}{256} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{9}$$

Die Wahrscheinlichkeit für die Ausbreitung des Gerüchts zu einer der drei anderen Personen nach genau n Zügen berechnet sich durch die Übergangsmatrix Q^n der Matrix (9). Anschließend wird aus den farblich markierten Feldern der Matrix, die unabhängig von n stets die selben sind, die Wahrscheinlichkeit berechnet. Die Übergangsmatrix für $n = 1$:

$$Q_1 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{81}{256} & \boxed{\frac{108}{256}} & \boxed{\frac{54}{256}} & \boxed{\frac{12}{256}} & \boxed{\frac{1}{256}} \\ \frac{1}{16} & \frac{4}{16} & \frac{6}{16} & \frac{4}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{256} & \frac{12}{256} & \frac{54}{256} & \frac{108}{256} & \frac{81}{256} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Das rote Feld (r) gibt die Wahrscheinlichkeit an, das nach einer Durchführung genau eine Person an das Gerücht glaubt, sofern zu Beginn nur eine Person (Person A) daran geglaubt hat. Da die Wahrscheinlichkeit an das Gerücht zu glauben für alle vier Personen identisch ist ($p = \frac{x}{N}$), ist es irrelevant, ob eine Person davor an das Gerücht geglaubt hat oder nicht. Demnach wird r mit $\frac{1}{4}$ multipliziert, da mit dieser Wahrscheinlichkeit die Person, die an das Gerücht glaubt, die gewählte Person ist. Genauso wird das violette Feld v mit $\frac{1}{2}$, das blaue Feld b mit $\frac{3}{4}$ und das grüne Feld g mit 1 multipliziert, da jeweils mit dieser Wahrscheinlichkeit die gewünschte Person an das Gerücht glaubt. Auf Grund dessen, ergibt sich aus der Matrix Q_n die Formel für die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Gerücht nach n Durchführungen zu einer beliebig gewählten innerhalb der Gruppe Person ausbreitet

$$P_n = \frac{1}{4} * r + \frac{1}{2} * v + \frac{3}{4} * b + g \tag{10}$$

nach einem Durchgang in der Gruppe 1 also

$$P_n = \frac{1}{4} * \frac{108}{256} + \frac{1}{2} * \frac{54}{256} + \frac{3}{4} * \frac{12}{256} + \frac{1}{256} \tag{11}$$

Bei der Ausbreitung in Gruppe 1 ergibt sich für alle n die Wahrscheinlichkeit $P = \frac{1}{4}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Gerücht sich zu einer beliebigen der vier Personen ausbreitet beträgt unabhängig von der Anzahl der Durchführungen stets $p = \frac{1}{4}$.

Ausbreitung innerhalb Gruppe I

Befindet sich die Person in I, aber nicht in Gruppe 1, so wird die Wahrscheinlichkeit der Ausbreitung wie im folgenden berechnet. Sobald mindestens die Hälfte aller Personen in einer Gruppe an das Gerücht glaubt, wird davon ausgegangen, dass die Gruppe an das Gerücht glaubt. In den Gruppen in Modell 1, ist dies der Fall sobald mindesten zwei Personen an das Gerücht glauben. Glauben also mindestens zwei Personen in Gruppe 1 an das Gerücht, wird davon ausgegangen, das die Gruppe 1 an das Gerücht glaubt und das Gerücht breitet sich in der blauen Gruppe I zwischen den Gruppen 1 bis 4 aus. Daraus ergibt sich die folgende Übergangsmatrix.

$$R_1 = \begin{array}{c} \\ 0_1 \\ 1_1 \\ \geq 2_1 \\ 0_I \\ 1_I \\ 2_I \\ 3_I \\ 4_I \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 0_1 & 1_1 & \geq 2_1 & 0_I & 1_I & 2_I & 3_I & 4_I \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{81}{256} & \frac{108}{256} & \frac{67}{256} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{81}{256} & \frac{108}{256} & \frac{54}{256} & \frac{12}{256} & \frac{1}{256} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & \frac{4}{16} & \frac{6}{16} & \frac{4}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{256} & \frac{12}{256} & \frac{54}{256} & \frac{108}{256} & \frac{81}{256} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{12}$$

In den ersten drei Zeilen und Spalten, wurde die Übergangsmatrix (9) weitestgehend übernommen. Das Gerücht breitet sich in der Gruppe 1 aus, da aber nur relevant ist, ab wann mindestens 2 Personen in der Gruppe an das Gerücht glauben, wurden für die Ausgangszustände 0_1 und 1_1 die Wahrscheinlichkeiten, dass die Zustände 2, 3 und 4 erreicht werden, addiert und in das Feld $\geq 2_1$ zusammengefasst. Nach erreichen dieses Zustands wird mit der Wahrscheinlichkeit von $p = 1$ in der anschließenden Durchführung der Zustand erreicht, dass eine Gruppe an das Gerücht glaubt (1_1). Wenn dieser Zustand aus dem Zustand $\geq 2_1$ erreicht wird, so ist es Gruppe 1, die an das Gerücht glaubt. Wird der Zustand aus einem anderen beliebigen Zustand erreicht, so kann es jede beliebige Gruppe sein, die an das Gerücht glaubt. genauso wie bei 2_I und 3_I zwei bzw. drei beliebige Gruppen an das Gerücht glauben. Nach dem selben Prinzip wie im vorangegangenen Kapitel, kann die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass genau die Gruppe erreicht wird, in der sich die gewählte Person befindet.

$$R_1 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} 0_1 & 1_1 & \geq 2_1 & 0_I & 1_I & 2_I & 3_I & 4_I \end{array} \\ \begin{array}{c} 0_1 \\ 1_1 \\ \geq 2_1 \\ 0_I \\ 1_I \\ 2_I \\ 3_I \\ 4_I \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{81}{256} & \frac{108}{256} & \boxed{\frac{67}{256}} & 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{81}{256} & \frac{108}{256} & \frac{54}{256} & \frac{12}{256} & \frac{1}{256} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & \frac{4}{16} & \frac{6}{16} & \frac{4}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{256} & \frac{12}{256} & \frac{54}{256} & \frac{108}{256} & \frac{81}{256} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$P_n = \frac{1}{4} * r + \frac{1}{2} * v + \frac{3}{4} * b + g$$

Wenn das erste Mal der Zustand 1_I erreicht wird ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese eine Gruppe, die an das Gerücht glaubt, die gesuchte Gruppe ist $p = 0$ und nicht $p = \frac{1}{4}$, da die Gruppe, die an das Gerücht glaubt Gruppe 1 ist. Aus diesem Grund muss die orange markierte Wahrscheinlichkeit (o) aus der Durchführung davor, von r_n abgezogen werden, da diese genau der Wahrscheinlichkeit entspricht die in der neuen Durchführung zusätzlich bei r ist und nicht eine beliebige Gruppe aus I ist, sondern Gruppe 1

$$P_n = \frac{1}{4} * (r_n - o_{n-1}) + \frac{1}{2} * v_n + \frac{3}{4} * b_n + g_n \tag{13}$$

P_n gibt bisher lediglich die Wahrscheinlichkeit an, dass das Gerücht in der Gruppe der gewählten Person in I landet. Für die Wahrscheinlichkeit, dass das Gerücht sich auch zur gewählten Person ausbreitet, muss jedoch noch P_n mit $\frac{1}{4}$ multipliziert werden. Dies liegt daran, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die gewählte Person zufällig die Person ist, die das Gerücht in der Gruppe übernimmt $p = \frac{1}{4}$ beträgt und genau mit dieser Wahrscheinlichkeit auch in n Durchführungen die gewählte Person an das Gerücht glaubt, wie im vorherigen Kapitel gezeigt wurde.

$$P_n = (\frac{1}{4} * (r_n - o_{n-1}) + \frac{1}{2} * v_n + \frac{3}{4} * b_n + g_n) * \frac{1}{4} \tag{14}$$

Der folgende Graph zeigt den Verlauf der Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Zeit. Eine beliebige Person von E bis P glaubt an das von Person A in des Netzwerk gebrachte Gerücht.

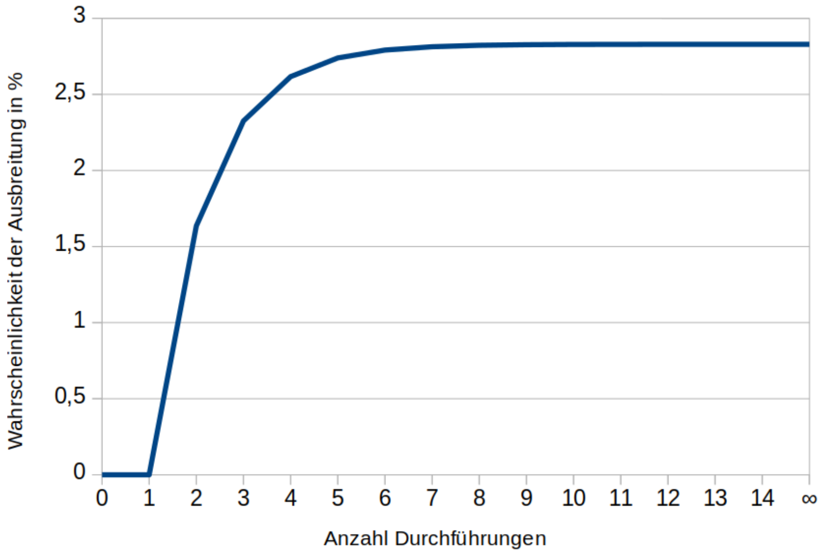

Abb. 2: Wahrscheinlichkeit der Ausbreitung zu beliebiger Person von E bis P im Modell 1

Wie sich bereits in R_1 erkennen ließ, ist die Wahrscheinlichkeit der Ausbreitung nach einer Durchführung $p = 0$. Ab der zweiten Durchführung steigt die Wahrscheinlichkeit stark an, ehe sie nach etwa 8 Durchführungen bei $p = 2,83\%$ stagniert.

Ausbreitung innerhalb der Gruppe α

Nach dem selben Prinzip lässt sich auch die Ausbreitung des Gerüchts zu einer beliebigen Person in der Gruppe II bis IV modellieren. Sobald die Hälfte der Personen in Gruppe 1 an das Gerücht glauben, breitet sich das Gerücht eine Stufe höher zwischen den Gruppen 1 bis 4 aus. Sobald hier wieder mindestens zwei Gruppen an das Gerücht glauben, wird die Ausbreitung zwischen den Gruppen I bis IV in α modelliert. Daraus ergibt sich die folgende Übergangsmatrix.

$$S_1 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccccc} 0_1 & 1_1 & \geq 2_1 & 0_I & 1_I & \geq 2_I & 0_\alpha & 1_\alpha & 2_\alpha & 3_\alpha & 4_\alpha \end{array} \\ \begin{array}{c} 0_1 \\ 1_1 \\ \geq 2_1 \\ 0_I \\ 1_I \\ \geq 2_I \\ 0_\alpha \\ 1_\alpha \\ 2_\alpha \\ 3_\alpha \\ 4_\alpha \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{81}{256} & \frac{108}{256} & \frac{67}{256} & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{81}{256} & \frac{108}{256} & \frac{67}{256} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{81}{256} & \frac{108}{256} & \frac{54}{256} & \frac{12}{256} & \frac{1}{256} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & \frac{4}{16} & \frac{6}{16} & \frac{4}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{256} & \frac{12}{256} & \frac{54}{256} & \frac{108}{256} & \frac{81}{256} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{15}$$

Es wurde erneut weitestgehend die Übergangsmatrix (12) übernommen. Sie wurde lediglich durch eine weitere Ebene erweitert. Es lässt sich erneut mit den Werten aus S_1 die Wahrscheinlichkeit mit der Formel (13) berechnen. Allerdings muss die Formel zusätzlich noch mit $\frac{1}{4}$ multipliziert werden, da nicht nur die richtige Gruppe 5 bis 16 in I bis IV erreicht werden muss, sondern auch in dieser Gruppe die gewählte Person.

$$P_n = (\frac{1}{4} * (r_n - o_{n-1}) + \frac{1}{2} * v_n + \frac{3}{4} * b_n + g_n) * \frac{1}{16} \tag{16}$$

Im folgenden der Graph für den Verlauf der Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Anzahl der Durchführungen, dass eine beliebige Person von Q bis BL an das von Person A ins Netzwerk gebrachte Netzwerk Gerücht glaubt.

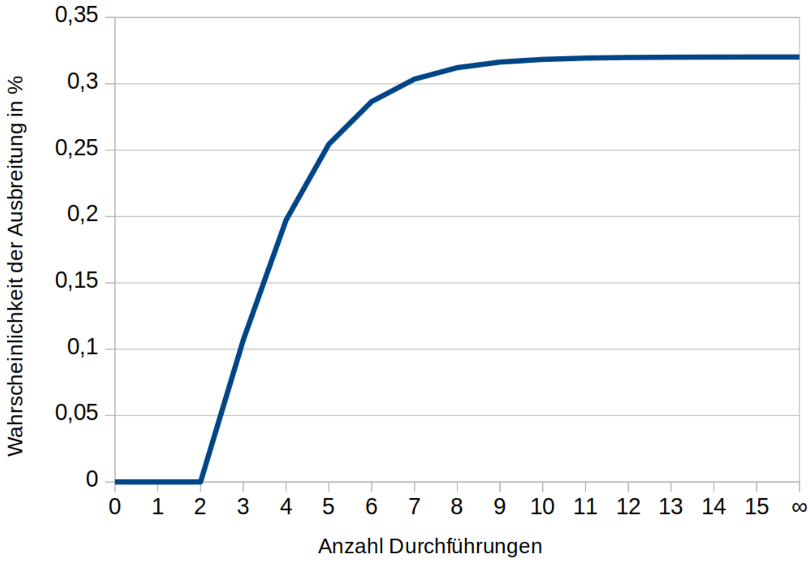

Abb. 3: Wahrscheinlichkeit der Ausbreitung zu beliebiger Person Q bis BL

Bei der Ausbreitung des Gerüchts von Person A zu einer der Personen Q bis BL werden mindestens 3 Durchführungen benötigt, ehe das Gerücht die Person erreichen kann. Grund dafür ist, dass sich zuerst das Gerücht innerhalb Gruppe 1 zu mindestens 2 Personen ausbreiten muss, ehe es sich in Gruppe I und dann in α ausbreiten kann. Dafür wird jeweils eine weitere Durchführung benötigt. Dafür, dass das Gerücht zufällig bei der richtigen Gruppe und anschließend dort bei der gewählten Person landet, wird kein Zug benötigt. Erneut stagniert die Wahrscheinlichkeit der Ausbreitung nach ca.13 Zügen bei $p = 0,32\%$.

Es wurde die Wahrscheinlichkeit der Ausbreitung eines von Person A in das Netzwerk gebrachten Gerüchts zu jeder einzelnen Person individuell berechnet. Das Ziel ist die exakte eine Wahrscheinlichkeit der Ausbreitung zu erhalten, mit der die verschiedenen Modelle verglichen werden können. Da jede Person, zu der sich das Gerücht ausbreiten kann, zufällig gewählt wird, muss dafür die durchschnittliche Wahrscheinlichkeit der Ausbreitung zu jeder der 63 Personen außer Person A gebildet werden. Die Personen B bis D sind in Gruppe 1, die Wahrscheinlichkeit der Ausbreitung beträgt bei diesen 3 Personen $p_1 = 25\%$. Bei den 12 Personen D bis P hat die Wahrscheinlichkeit p_I den in Abbildung 2 abgebildeten Verlauf, während für die 48 Personen Q bis BL die Wahrscheinlichkeit p_α den in Abb. 3 gezeigten Verlauf nimmt.

Die Gesamtwahrscheinlichkeit beträgt demnach

$$P = p_1 * \frac{3}{63} + p_I * \frac{12}{63} + p_\alpha * \frac{48}{63}. \tag{17}$$

Das Diagramm für die Gesamtwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Anzahl der Durchführungen folgt. Die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Kategorien wurden bereits in Verhältnis zueinander gesetzt, demnach wurde p_1 bereits mit $\frac{3}{63}$ multipliziert. Dadurch wird der Anteil, den die einzelnen Kategorien zu der Gesamtwahrscheinlichkeit beitragen verdeutlicht.

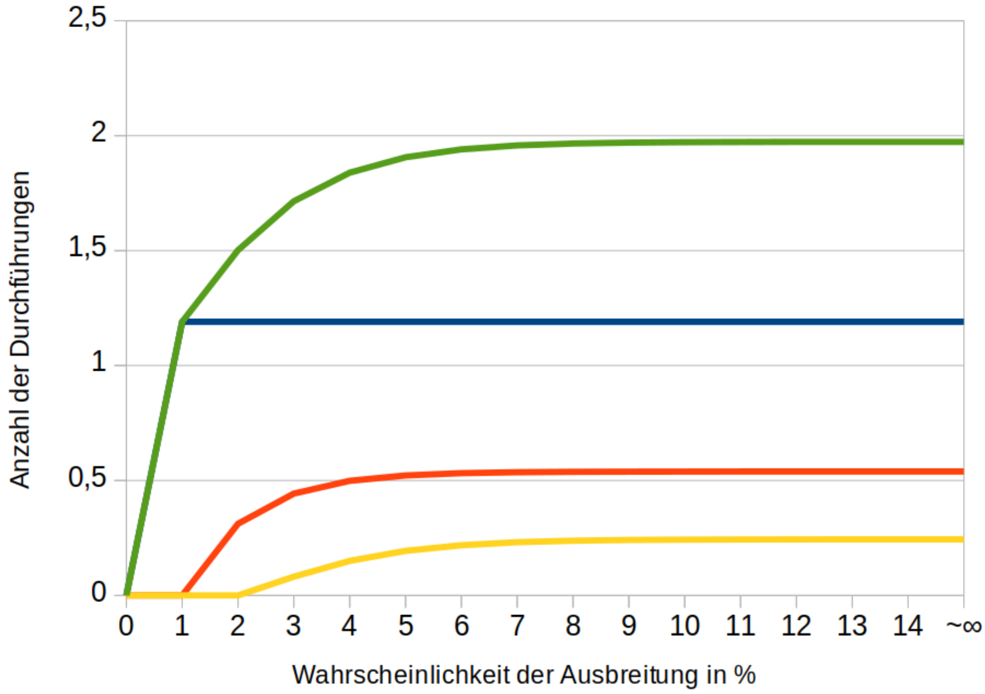

Abb. 4: Wahrscheinlichkeit der Ausbreitung zu Personen der drei Kategorien in Modell 1

Der grüne Graph zeigt die Gesamtwahrscheinlichkeit der Ausbreitung des Gerüchts von Person A zu einer beliebigen anderen Person in Modell 1. Die anderen drei Graphen zeigen die Zusammensetzung der Gesamtwahrscheinlichkeit aus den anderen drei Kategorien. Die Personen aus der ersten Kategorie (B bis D) tragen den größten Anteil an der Gesamtwahrscheinlichkeit. Die anderen Kategorien bei denen eine Ausbreitung nach einer und in Kategorie 3 sogar zwei Durchführungen noch nicht möglich ist, tragen einen deutlich geringeren Anteil (ca. $\frac{1}{2}$ bzw. ca. $\frac{1}{4}$)

2.4 Modifikation des Modells

Bisher wurden die Wahrscheinlichkeiten immer mit Hilfe des Wright-Fisher-Modells berechnet. Die Wahrscheinlichkeit der Ausbreitung entstand bisher ausschließlich aus dem Anteil der Personen in einer Gruppe, die an das Gerücht glauben. Es gibt die Möglichkeit, das Gerücht unterschiedlich zu gewichten und als glaubwürdigeres oder weniger glaubwürdiges Gerücht zu modellieren. Dazu wird die bisherige Wahrscheinlichkeit der Ausbreitung zu jeder einzelnen Person in einer Durchführung $p = \frac{x}{N}$ durch folgende Formel ersetzt

$$p = \frac{\phi * x}{\phi * x + (N - x)} \tag{18}$$

Ist $\phi > 1$, so ist das Gerücht glaubwürdiger.
Ist $\phi < 1$, so ist das Gerücht unglaubwürdiger.
Mithilfe von ϕ im Zähler kann die Glaubwürdigkeit des Gerüchts verändert werden, das ϕ im Nenner sorgt dafür, dass die Wahrscheinlichkeit p stets ≤ 1 bleibt. Es lässt sich erkennen, dass die Wahrscheinlichkeit steigt, wenn $\phi > 1$, ist $\phi = 1$, so bleibt die Wahrscheinlichkeit aus den bisherigen Berechnungen erhalten und wenn gilt $\phi < 1$, so ist die Wahrscheinlichkeit der Ausbreitung geringer.
Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass nach einer Durchführungen y der N Personen an das Gerücht glauben, muss in der Formel (8) $\frac{x}{N}$ durch die genannte Formel ersetzt werden:

$$P(x, y) = \binom{N}{y} * (\frac{\phi * x}{\phi * x + (N - x)})^y * (1 - \frac{\phi * x}{\phi * x + (N - x)})^{N-y} \tag{19}$$

Die Ergebnisse können erneut in die jeweiligen Felder der Übergangsmatrix für eine Gruppe eingesetzt werden. Daraus lassen sich nach dem selben Verfahren die Übergangsmatrizen für die Ausbreitung zwischen Gruppen und Übergruppen erstellen.

3 Ergebnisse

3.1 Ergebnisse der Modelle

In den drei anderen Modellen breitet sich das Gerücht nach dem selben Prinzip, wie in Modell 1 aus. Modell 2 hat die Besonderheit, dass sich alle 64 Personen in einer Gruppe befinden. Die Ausbreitung des Gerüchts von Person A zu einer beliebigen anderen Person beträgt zu jedem Zeitpunkt $p = \frac{1}{64} = 1,5625\%$.
Modell 3 besteht aus acht Gruppen. Die Personen B bis H sind in einer Gruppe mit Person A und damit in der ersten Kategorie. Zu ihnen breitet sich das Gerücht, unabhängig von der Anzahl der Durchführungen mit $p = \dfrac{1}{8} = 12,5\%$ aus. Die übrigen 56 Personen I bis BL sind befinden sich alle in der anderen Kategorie. Nach einer Durchführung beträgt die Wahrscheinlichkeit noch $p = 0$. Anschließend steigt die Wahrscheinlichkeit mit steigenden Durchführungen, ehe sie bei $p = 0,36\%$ stagniert. Der Graph zeigt die Wahrscheinlichkeit der Ausbreitung zu einer zufällig gewählten Person und den jeweiligen Anteil der Kategorien, die bereits in Verhältnis gesetzt wurden.

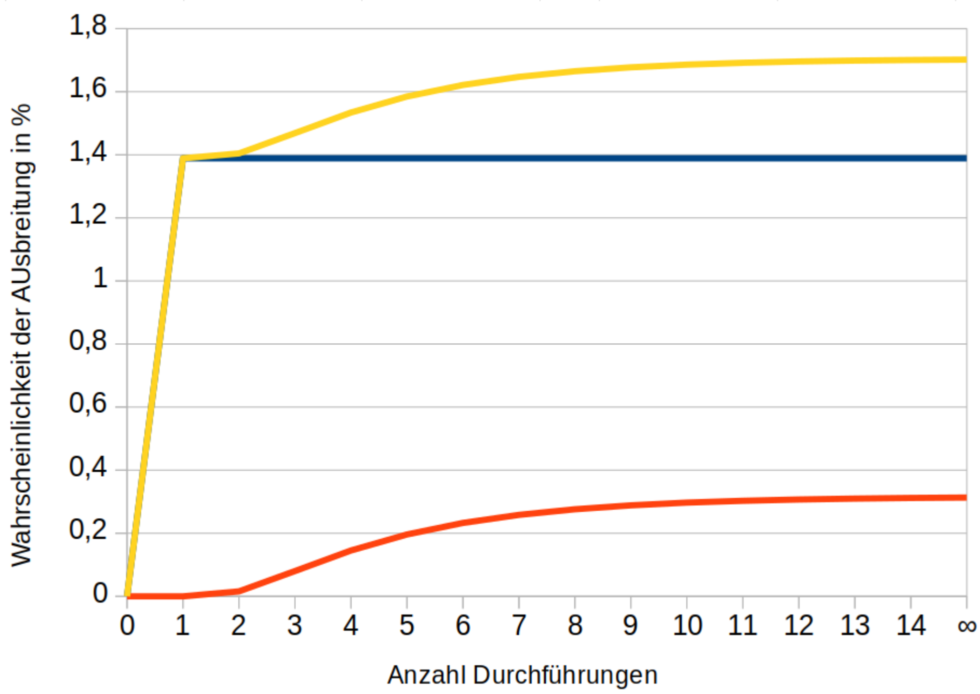

Abb. 5: Wahrscheinlichkeit der Ausbreitung zu Personen der zwei Kategorien in Modell 3

Auch in Modell 4 lassen sich die Personen in zwei verschieden Kategorien unterteilen. Die erste Kategorie besteht aus den Personen B bis P, da sich diese alle in der selben Gruppe, wie Person A befinden. Für diese 15 Personen beträgt die Wahrscheinlichkeit der Ausbreitung jeweils $p = \frac{1}{16} = 6,25\%$. Die 48 übrigen Personen Q bis BL bilden die zweite Kategorie in der erneut mindestens eine Durchführung benötigt wird, ehe eine Ausbreitung möglich ist, die Wahrscheinlichkeit der Ausbreitung steigt erneut danach erst an, ehe sie bei $p = 0,19\%$ stagniert. Die Gesamtwahrscheinlichkeit der Ausbreitung steigt demnach von $p = \frac{15}{63} * 6,25\% = 1,49\%$ bis zu $p = 1,49\% + \frac{48}{63} * 0,19\% = 1,62\%$ an. Im folgenden der Graph für die Wahrscheinlichkeit der Ausbreitung zu einer beliebigen Person in Modell 4 und den jeweiligen Anteil der Kategorien, die bereits in Verhältnis gesetzt wurden.

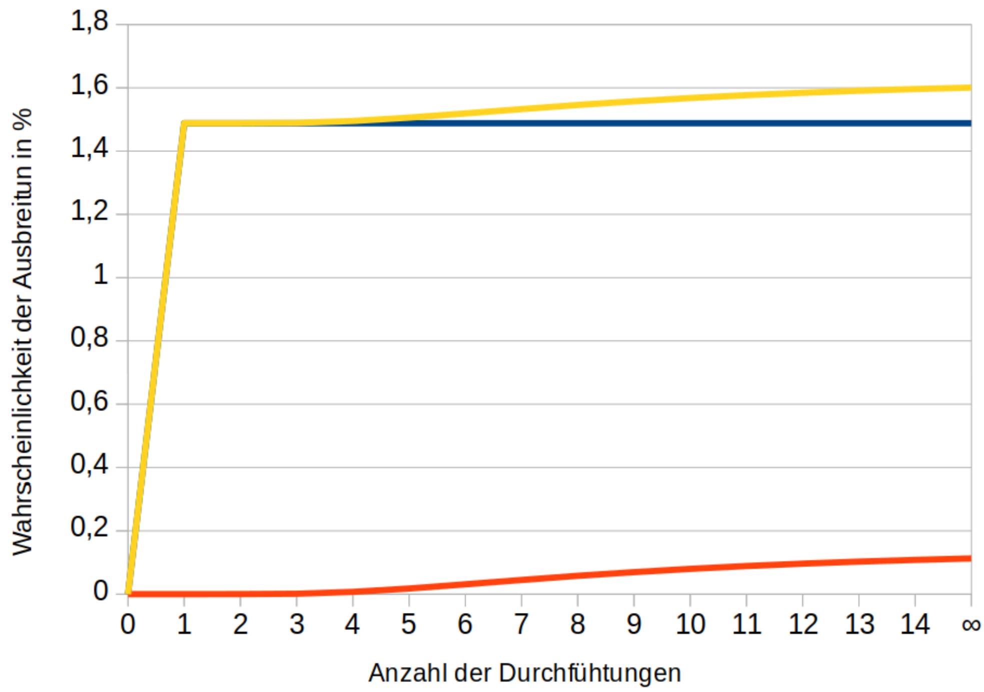

Abb. 6: Wahrscheinlichkeit der Ausbreitung zu Personen der zwei Kategorien in Modell 4

Die vier beschreibenen Modelle lassen sich in ihrem Verlauf der Wahrscheinlichkeit der Ausbreitung zu einer beliebig gewählten Person gut vergleichen. Im Folgenden der Graph der Gesamtwahrscheinlichkeiten der vier einzelnen Modelle in Abhängigkeit von den Durchführungen.

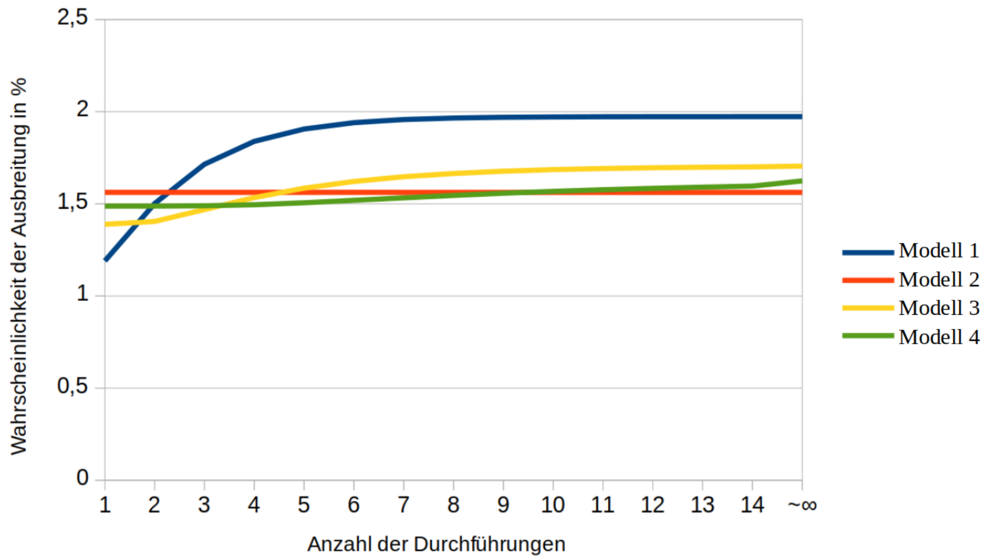

Abb. 7: Wahrscheinlichkeit der Ausbreitung zu zufällig gewählter Person in den vier verschiedenen Modellen

Die Wahrscheinlichkeiten liegen alle zu jedem Zeitpunkt zwischen 1% und 2%, am Ende ist der maximale Unterschied zwischen den Modellen etwa 0,4%. Bei Modell 1 ist die Gesamtwahrscheinlichkeit am Ende mit gerundet 1,97% am höchsten, obwohl sie zu Beginn mit gerundet 1,19% am geringsten war. Modell 2 blieb konstant bei gerundet 1,56% und hatte damit zu Beginn die höchste, am Ende aber nur noch die geringste Wahrscheinlichkeit. Die Modelle 3 und 4 liegen beide dazwischen.

3.2 Modifikation mit ϕ

Man kann nach dem bereits beschriebenem System die Glaubwürdigkeit des Gerücht durch ϕ verändern. Im Folgenden wird die Wahrscheinlichkeit der Ausbreitung zu einer beliebig gewählten Person in Modell 1 in Abhängigkeit von ϕ gezeigt. Es wird die Gesamtwahrscheinlichkeit, sowie der jeweilige Anteil der drei Kategrorien gezeigt, die dafür selbstverständlich bereits in Verhältnis gesetzt wurden.

ϕ	p (Kat. 1)	p (Kat. 2)	p (Kat. 3)	p_{ges}
0,5	0,043%	0,0003%	$1,93 * 10^{-6}$%	0,044%
0,75	0,42%	0,044%	0,069%	0,46%
1	1,19%	0,54%	0,24 %	1,97%
1,5	2,78 %	4,39%	6,91%	14,09%
2	3,66%	9,03%	22,61%	35,33%

Tab. 1: Modifikationen mit ϕ

Es ist auffällig, welchen großen Einfluss das ϕ auf die Wahrscheinlichkeit der Ausbreitung nimmt. Wird das ursprüngliche $\phi = 1$ halbiert so beträgt die neue Wahrscheinlichkeit der Ausbreitung nur noch ca. $\frac{1}{45}$ der ursprünglichen Wahrscheinlichkeit. Wir das ϕ jedoch auf 2 verdoppelt, so ist die neue Wahrscheinlichkeit ca. 18 mal so groß wie für $\phi = 1$.

4 Diskussion

Vergleich der Kategorien

Innerhalb der einzelnen Modelle, mit der Ausnahme von Modell 2, da sich dieses nicht in mehrere Kategorien unterteilen lässt, wurden bereits Auffälligkeiten erwähnt. Die Kategorien, bei denen die Personen in der gleichen Gruppe, wie Person A (oder bei Modell 1 auch Übergruppe) sind, tragen einen größeren Anteil an der Gesamtwahrscheinlichkeit, obwohl sie jeweils aus maximal $\frac{3}{12}$ bis zu $\frac{3}{48}$ (jeweils Modell 1: Gruppe I; Gruppe α) der Personen einer anderen Kategorie bestehen. Allerdings ist der Weg der Ausbreitung des Gerüchts kürzer, denn es muss sich nur in der Gruppe zur Person ausbreiten. In den anderen Kategorien muss sich das Gerücht stets in mehreren Gruppen und Übergruppen ausbreiten um zur Person zu gelangen. Dadurch ist die Gefahr der Absorption viel häufiger, nämlich in jeder Gruppe und Übergruppe, vorhanden und senkt somit die Wahrscheinlichkeit der Ausbreitung stark. Die Wahrscheinlichkeiten der Ausbreitung sind dadurch ca. 8,8 bis 78 mal größer als die in den anderen Kategorien (erneut jeweils Modell 1: Gruppe I; Gruppe α). Dadurch lässt sich erklären, warum die Wahrscheinlichkeiten in den ersten Kategorien höher sind.
Auffällig ist zudem, dass die Wahrscheinlichkeit der Personen in der ersten Kategorie konstant bleibt, während die Wahrscheinlichkeit in den anderen Kategorien, jeweils bei $p = 0$ startet, anschließend steigt und zu einem Wert konvergiert. Die Werte in der ersten Kategorie bleiben stets gleich, da sich die betreffenden Personen alle in einer Gruppe befinden, und sich das Gerücht dort mit einer stets konstanten Wahrscheinlichkeit ausbreitet. Zu den anderen Personen kann das Gerücht sich jedoch gar nicht in einem Zug ausbreiten, da diese sich in anderen Gruppen befinden. Es muss sich zuerst in der Gruppe 1 zu mindestens der Hälfte der Personen, dann in die zufällig gewählte Gruppe und dort zu der gewählten Person ausbreiten. Dies begründet auch den etwas länger andauernden Anstieg der Wahrscheinlichkeit, ehe sie konvergiert, da das Gerücht ab einer gewissen Anzahl an Durchführungen entweder die gewählte Person erreicht hat oder absorbiert wurde.

Vergleich der Modelle

Beim Vergleich zwischen den Modellen, können viele Auffälligkeiten festgestellt werden. Wie bereits erwähnt, besitzt die geringste Ausbreitungswahrscheinlichkeit nach einer Durchführung Modell 1. Dies lässt sich dadurch erklären, dass in diesem Modell nach einer Durchführung am wenigsten Personen, nämlich nur 3 Personen mit dem Gerücht erreicht werden können.

Anschließend folgen die Modelle 3 und 4, bei denen das Gerücht nach einer Durchführung zu sieben bzw. 15 Personen gelangen kann. Die größte Ausbreitungswahrscheinlichkeit besitzt Modell 2, da bei diesem bereits nach einer Durchführung alle Personen erreicht werden können.
Da sich in diesem Modell jedoch alle Personen in einer Gruppe befinden, bliebt die Ausbreitungswahrscheinlichkeit bei allen Durchführungen konstant. Bei allen anderen Modellen steigt die Wahrscheinlichkeit mit zunehmender Anzahl an Durchführungen, ehe sie bei einem Wert stagniert. Die Reihenfolge der Modelle ist hierbei exakt umgekehrt. Dies lässt sich damit erklären, dass die Gruppen der Modelle kleiner sind. Daher ist die Wahrscheinlichkeit der Absorption $(1 - \frac{x}{N})$, mit $x = 1$ vor der ersten Durchführung zu Beginn kleiner, die Wahrscheinlichkeit, dass das Gerücht sich ausbreitet steigt dadurch.
Eine weitere Auffälligkeit ist die unterschiedliche Dauer der Konvergenz. Modell 2 bleibt dauerhaft bei einer konstanten Wahrscheinlichkeit, was darauf zurück zu führen ist, dass sich alle Personen in einer Gruppe befinden. Die anderen Modellen stagnieren erst später. Modell 1 stagniert ab etwa elf Durchführungen (die Werte ändern sich pro Durchführung um weniger als 0,001%). Obwohl in diesem Modell sich das Gerücht teilweise auch zwischen Übergruppen ausbreiten muss, handelt es sich immer nur um die Ausbreitung zwischen vier Personen/Gruppen, bei denen deutlich schneller der Zustand, dass entweder alle oder niemand an das Gerücht glaubt eintritt. Anschließend folgt nach ca. 16 Durchführungen Modell 3 bei dem sich das Gerücht in Gruppen mit jeweils acht Personen ausbreiten muss. Das Modell 4 stagniert erst ab ca. 24 Durchführungen, da sich in diesem Modell das Gerücht zu Beginn und am Ende in jeweils einer Gruppe mit 16 Personen befindet, und für die Stagnation ein rekurrenter Zustand erreicht werden muss.

Modifikation mit ϕ

Bei genauerer Betrachtung der einzelnen Kategorien fällt auf, dass der Einfluss von ϕ auf die Wahrscheinlichkeit unterschiedlich ist. Während in Kategorie 3 die Wahrscheinlichkeit sich zwischen $\phi = 2$ und $\phi = 0,5$ um den Faktor $1,1 * 10^7$ verändert, ändert sie sich in Kategorie 1 nur um den Faktor 84. Dies lässt durch den unterschiedlich langen Weg der Ausbreitung erklären. Während in Kategorie 1, sich das Gerücht nur in einer Gruppe ausbreiten muss, hat das Gerücht in Kategorie 2 und besonders in Kategorie 3 einen längeren Ausbreitungsweg. Das Gerücht muss sich in mehr Gruppen ausbreiten, wodurch das ϕ einen größeren Einfluss nehmen kann. Die Gesamtwahrscheinlichkeit verändert sich zwischen $\phi = 0,5$ und $\phi = 2$ um den Faktor 800.

Damit lässt sich auch die Auffälligkeit erklären, dass sich mit Veränderung von ϕ auch der Anteil der einzelnen Kategorien an der Gesamtwahrscheinlichkeit verändert hat. Während für $\phi = 1$ die Kategorie 1 einen Anteil von 60% an der Gesamtwahrscheinlichkeit, Kategorie 2 einen Anteil von 27% und Kategorie 3 einen Anteil von 12% hat, verschärft sich dieses Verhältnis für $\phi = 0,5$ sehr stark. Dort trägt Kategorie 1 einen Anteil von 99,2%. 0,8% fallen auf Kategorie 2 und die sehr geringe Restwahrscheinlichkeit auf Kategorie 3. Ganz im Gegensatz dazu trägt für $\phi = 2$ Kategorie 3 mit 64% den größten Anteil, während nur noch 10,6% auf Kategorie 1 entfallen. Durch den unterschiedlich großen Einfluss den ϕ auf die einzelnen Kategorien nimmt, verändern sich die Wahrscheinlichkeiten auch unterschiedlich stark. Bei sinkendem ϕ sinkt die Wahrscheinlichkeit der Ausbreitung in Kategorie 3 deutlich tiefer als in Kategroie 1, wodurch diese einen größeren Anteil an der Gesamtwahrscheinlichkeit nimmt. Genauso steigt die Wahrscheinlichkeit in Kategorie 3 bei höherem ϕ am meisten und sie übernimmt den größten Anteil an der Geamtwahrscheinlichkeit.

Ausblick

Weiterführend kann man sich noch mit einer Vielzahl anderer beeinflussender Faktoren auf die Gerüchtausbreitung befassen und entsprechende Modifikationen einbauen. Ein nächster Schritt bei dem erstellten Modell wäre, die Gruppengröße variieren zu lassen, da diese realistisch nicht geordnet oder gleich groß sind.

Danksagung

Besonders möchten wir uns bei Prof. Dr. Nicole Bäuerle, Karlsruher Institut für Technologie, Institut für Stochastik, bedanken. Prof. Dr. Nicole Bäuerle betreute uns über die gesamte Projektzeit und nahm sich für uns Zeit, um uns die Erarbeitung der mathematischen Grundlagen zu erleichtern, Ideen für die Herangehensweise zu sammeln oder neue Denkanstöße zu geben. Für Fragen war sie jederzeit offen und leitete uns strukturiert, zielgerichtet und zugleich mit viel Raum für Kreativität durch unsere Projektarbeit.
Ein herzliches Dankeschön gebührt auch Herrn Gruber, der das Projekt von Seiten des Hector Seminars begleitete. Er las unsere Arbeit unter hohem Zeitaufwand Korrektur und stand uns über die Kooperationsphase und auch zuvor viele Jahre als Kursleiter stets mit Rat und Tat zur Seite.
Wir möchten auch Frau Richert einen Dank aussprechen, die uns als Kursbetreuerin viel über das Verfassen von Dokumentationen, Präsentationen oder das strukturierte Arbeiten beibringen konnte.
Die gesamte Hector-Stiftung und damit besonders Dr. Hans-Werner Hector und Josephine Hector ermöglichten uns erst den Weg zu und durch unsere Kooperationsphase, vielen Dank hierfür.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Quellen

Nicolas Lanchier: Stochastic Modeling. Springer, Online-Ressource (XIII, 303 p. 63 illus., 6 illus. in color, online resource), 2017.

Henk C. Tijms: Understanding probability. Cambridge University Press, 3rd ed (Online-Ausg.) / Online-Ressource (1 online resource (x, 562 p.)) : ill., 2012.

Titelbild: https://www.uni-muenchen.de/informationen_fuer/presse/presseinformationen/2016/carstensen_socialmedia.html.

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichern wir, dass diese Dokumentation nur unter der Beratung von Prof. Dr. Nicole Bäuerle angefertigt ist und Quellen sowie Zitate kenntlich gemacht sind.

Ort, Datum	Leoni Groll
Ort, Datum	Samuel Neukirch