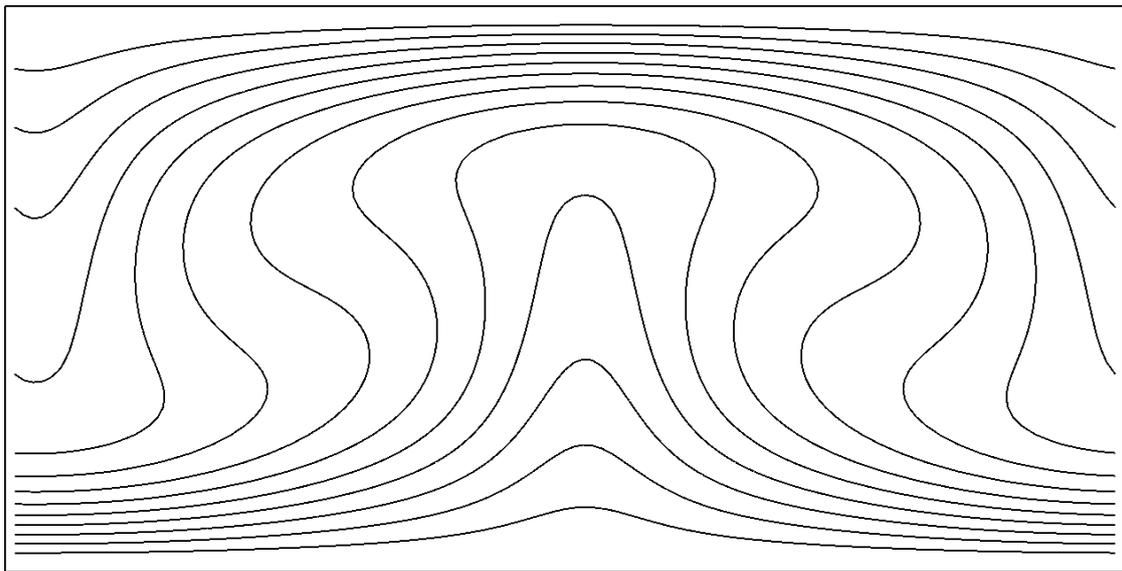


# Rayleigh-Bénard-Konvektion



Abschlussbericht der Kooperationsphase 2023/24

Durchgeführt am  
Institut für Angewandte Materialien - Mikrostruktur-Modellierung und Simulation (IAM-MMS),  
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)  
Betreut durch M.Sc. Marcel Weichel und Dr. Martin Reder

Paul Dyck, Lorenz Mutschler, Kurs KA 18

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Material und Methoden</b>	<b>2</b>
2.1	Rayleigh-Bénard-Konvektion . . . . .	2
2.1.1	Versuchsaufbau . . . . .	2
2.1.2	Einsetzen der Instabilität . . . . .	2
2.1.3	Wichtige Kennzahlen . . . . .	3
2.2	Konvektion-Diffusion . . . . .	5
2.3	Numerik . . . . .	6
2.3.1	1D-Fall . . . . .	6
2.3.2	2D-Fall . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Simulationsergebnisse</b>	<b>15</b>
3.1	Räumliche Anordnung von Rayleigh-Bénard-Zellen . . . . .	15
3.1.1	Simulationsumgebung . . . . .	15
3.1.2	Ergebnisse . . . . .	16
3.1.3	Diskussion . . . . .	18
3.2	Analyse des Geschwindigkeitsfeldes . . . . .	19
3.2.1	Simulationsumgebung . . . . .	19
3.2.2	Ergebnisse . . . . .	19
3.2.3	Diskussion . . . . .	22
3.2.4	Validierung . . . . .	23
3.3	Analyse verschiedener Rayleigh-Zahlen . . . . .	26
3.3.1	Simulationsumgebung . . . . .	26
3.3.2	Ergebnisse . . . . .	26
3.3.3	Diskussion . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Fazit und Ausblick</b>	<b>30</b>
<b>5</b>	<b>Danksagung</b>	<b>31</b>
<b>6</b>	<b>Selbstständigkeitserklärung</b>	<b>32</b>

**ABSTRACT.** In this work, Rayleigh-Bénard convection is simulated and analyzed using the software package Pace3D.

First, the underlying mechanisms and physical quantities of Rayleigh-Bénard convection are explained in the theory section. This is followed by a detailed deduction of the discretized convection-diffusion equation as a basis for the simulation.

The simulation results are then presented and discussed. First, the spatial arrangement of the Rayleigh-Bénard cells is discussed. Then the velocity field is analyzed. Finally, different Rayleigh numbers are examined. The results are in good agreement with experimental observations, theoretical predictions and various other research papers.

The findings are that Rayleigh-Bénard cells form at Rayleigh numbers greater than a critical value, higher Rayleigh numbers lead to stronger convection and Rayleigh-Bénard cells form one after the other.

## 1 Einleitung

Konvektion ist ein häufig in der Natur auftretendes Phänomen, dem man in zahlreichen wissenschaftlichen Bereichen begegnet. So kommt Konvektion beispielsweise in der Ozeanographie in Form von Meeresströmungen [12], in der Meteorologie als Teil von Wettersystemen [2] und Windströmungen und sogar im astrophysikalischen Bereich in Sternen [7] vor. Ein Beispiel für industrielle Anwendungen ist der Antrieb von Turbinen bei der Stromerzeugung in Kraftwerken [10].

Eine sehr bekannte Konvektionsart ist die Rayleigh-Bénard-Konvektion. Sie tritt sowohl im Kleinen, wie etwa beim alltäglichen Wasserkochen, als auch in größeren Dimensionen, wie bei Magmaströmungen im Erdmantel [11], auf.

Rayleigh-Bénard-Konvektion entsteht, wenn eine horizontale Schicht aus homogener Flüssigkeit am Boden erwärmt wird. Infolgedessen bilden sich unter bestimmten Bedingungen Rayleigh-Bénard-Zellen.

Namensgeber der Rayleigh-Bénard-Konvektion sind Henri Bénard und Lord Rayleigh. Bénard entdeckte anno 1900 experimentell Konvektionszellen, während Rayleigh 1916 das Phänomen theoretisch analysierte.

Diese Arbeit befasst sich mit der Simulation der Rayleigh-Bénard-Konvektion.

## 2 Material und Methoden

### 2.1 Rayleigh-Bénard-Konvektion

#### 2.1.1 Versuchsaufbau

Der Versuchsaufbau besteht aus einer horizontalen, isotropischen Flüssigkeit, d.h. die Bewegung der kleinsten Teilchen ist unabhängig von der Richtung. Sie ist von zwei horizontalen, sehr gut temperaturleitfähigen Begrenzungen eingeschlossen. Die vertikalen Seitenwände dienen als zusätzliche Begrenzung, sodass ein geschlossenes System vorliegt.

#### 2.1.2 Einsetzen der Instabilität

Durch schlagartige Erwärmung der unteren Platte um  $\Delta T$ , während die obere Platte konstant auf  $T_0$  gehalten wird, entsteht ein vertikaler Temperaturgradient. Aufgrund von Diffusion breitet er sich mit der Zeit nach oben aus, sodass sich nach einiger Zeit ein konstantes, lineares Temperaturgefälle zwischen den beiden Platten einstellt, wie in Abbildung 1 zu sehen ist.

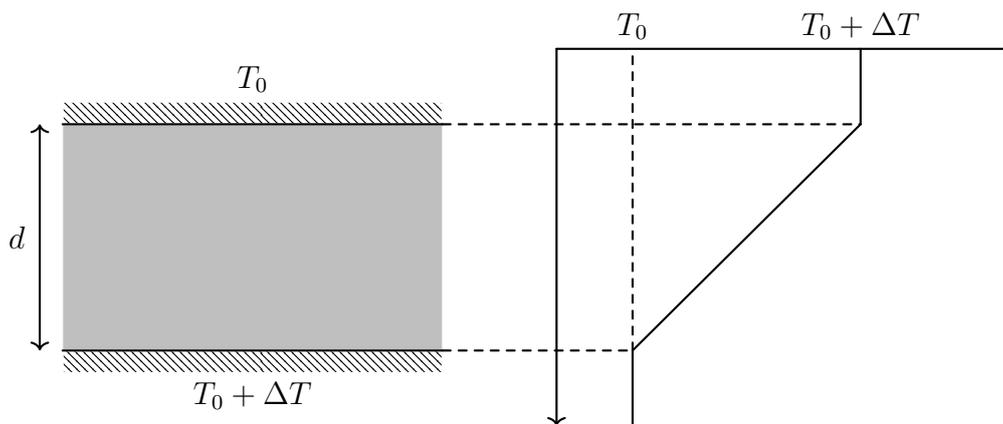


Abb. 1: Der Boden wird um  $\Delta T$  erwärmt, während die Decke auf  $T_0$  belassen wird. Mit der Zeit stellt sich ein vertikales Temperaturgefälle zwischen Boden und Decke ein.

Trotz des Gradienten setzt ohne weiteres keine Aufwärtsbewegung eines Elements B, wie in Abbildung 2 dargestellt, ein. Der Grund hierfür liegt darin, dass das Element nach dem Archimedischen Prinzip [4] keine Auftriebskraft erfährt, da die Dichte des Elements B sich nicht von der Dichte der gleich warmen Flüssigkeit in horizontaler Richtung unterscheidet. Durch eine Störung, etwa hervorgerufen durch Unregelmäßigkeiten am Boden, kann B nach B' verschoben werden. Dadurch erfährt dann das Element aufgrund der dichteren, horizontalen Umgebung eine Archimedische Kraft nach oben.

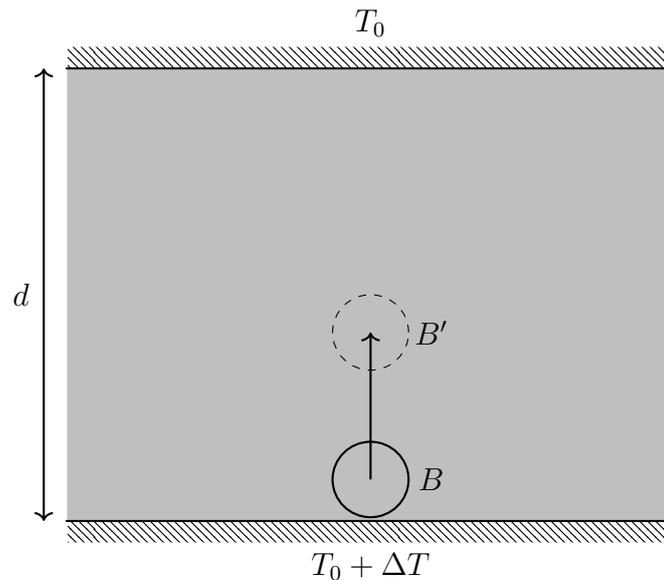


Abb. 2: Schematische Darstellung einer Störung: Verschiebung eines Volumenelements von B nach B'.

Wenn die Temperaturdifferenz zwischen dem Flüssigkeitselement und der Umgebung während der gesamten Aufwärtsbewegung fortbesteht, wird die Auftriebskraft aufrecht erhalten. Dies ist unerlässlich für einen konstanten Konvektionsstrom und das Entstehen von Rayleigh-Bénard-Zellen, die im Rahmen der Diskussion der Simulationsergebnisse analysiert werden.

### 2.1.3 Wichtige Kennzahlen

Das Verhalten des Systems kann mittels der dimensionslosen Rayleigh-Zahl

$$Ra = \frac{g \cdot \beta \cdot \rho \cdot \Delta T \cdot d^3}{\mu \cdot \alpha} \quad (1)$$

beschrieben werden [6]. Dabei steht  $g$  für die Erdschwerebeschleunigung mit der Einheit  $\text{m s}^{-2}$ . Der thermische Ausdehnungskoeffizient  $\beta$  mit der Einheit  $\text{K}^{-1}$  beschreibt die Veränderungen der Abmessungen eines Stoffes bei Temperaturveränderung. Die weiteren Größen im Zähler des Bruchs 1 sind die Dichte  $\rho$ , gemessen in  $\text{kg m}^{-3}$ , die Temperaturdifferenz zwischen den beiden horizontalen Platten  $\Delta T$  mit der Einheit  $\text{K}$  und ihr Abstand  $d$  mit der Einheit  $\text{m}$ .

Im Nenner steht  $\mu$  für die Viskosität der Flüssigkeit, gemessen in  $\text{Pa s}$ . Dabei ist  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ .  $\alpha$  ist die Temperaturleitfähigkeit des Mediums und hat die Einheit  $\text{m}^2 \text{ s}^{-1}$ .

Übersteigt die Rayleigh-Zahl einen kritischen Wert  $Ra_c$ , findet zusätzlich zur Diffusion auch Konvektion statt. Diffusion und Konvektion werden im Abschnitt 2.2 erklärt.

$Ra_c = 1707$  ist ein universaler Wert, unabhängig von der Flüssigkeit. Dieser Wert ist gültig im Fall von unendlicher Geometrie, d.h. unendlich großem horizontalen Ausmaß verglichen zur Höhe  $d$ , und sehr guter Leitfähigkeit der horizontalen Platten.

Sind die Ausmaße endlich, so gilt  $Ra_c > 1707$  [6].

Die Rayleigh-Zahl ist auch folgendermaßen definiert [8]:

$$Ra = Gr \cdot Pr \quad (2)$$

Die Grashof-Zahl  $Gr$  beschreibt das Verhältnis von Auftriebskräften zu Widerstandskräften, hervorgerufen durch die Viskosität  $\mu$  des Stoffes.

Die Prandtl-Zahl  $Pr$  beschreibt das Verhältnis von Impulsdiffusivität zur thermalen Diffusivität, d.h. Temperaturleitfähigkeit  $\alpha$ .

Beide Größen sind ohne Einheit.

Die in diesem Abschnitt aufgeführten Größen sind wichtige Kennzahlen zur Charakterisierung der Rayleigh-Bénard-Konvektion.

## 2.2 Konvektion-Diffusion

Unter Diffusion versteht man einen natürlichen Prozess, bei dem ohne äußere Einwirkungen Konzentrationsunterschiede durch die Temperaturbewegung der Teilchen ausgeglichen werden.

Diffusion tritt bei Konzentrationsunterschieden auf. Dabei bewegen sich Teilchen von Gebieten mit generell höherer Konzentration zu Regionen mit niedrigerer Konzentration. Somit findet ein Konzentrationsausgleich statt und es stellt sich ein Gleichgewicht ein. Beispiele für Diffusion sind Vermischungsvorgänge, wie z.B. Salz in Wasser, sowie auch Wärmediffusion, etwa in Form von Wärmeleitung.

Konvektion beschreibt den Strömungstransport von physikalischen Größen wie Masse oder Temperatur.

Meist treten Diffusion und Konvektion gemeinsam auf, wie aus Abbildung 3 ersichtlich ist. Es lässt sich eine Ausbreitung des Konzentrationsbereiches durch Diffusion beobachten. Gleichzeitig wird der Bereich durch die Strömung, also Konvektion, nach rechts transportiert.

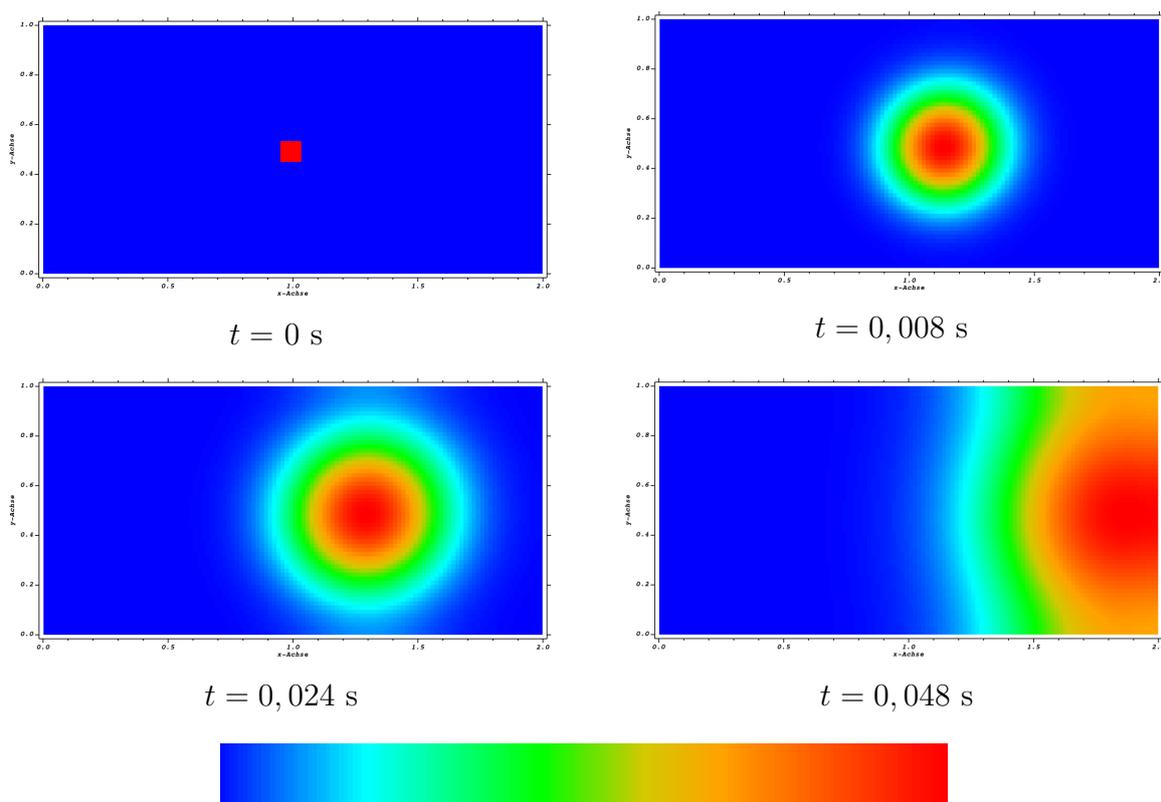


Abb. 3: Die Abbildungen der Ergebnisse mit Pace [3] stellen verschiedene Zeitpunkte eines Konvektion-Diffusion-Vorgangs dar, bei dem zu Beginn im Zentrum eine Konzentration platziert wird und ein laminarer Strom von links kommt. Je weiter rechts sich eine Farbe auf der Skala befindet, desto höher ist die Konzentration.

Die Konzentrationsänderung ist somit geprägt durch die Überlappung eines Konzentrations- und Geschwindigkeitsfeldes.

Dieses Zusammenspiel wird als Konvektion-Diffusion bezeichnet und wird durch folgende Formeln in Gleichung 3 [9] beschrieben:

$$1\text{D: } \frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v \left( \frac{\partial c}{\partial x} \right) \quad \text{bzw. } 3\text{D: } \frac{\partial c}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (D \vec{\nabla} c - \vec{v} c) \quad (3)$$

Die Gleichung setzt sich aus der Summe von Diffusion und Konvektion zusammen. Sie gilt für ein bestimmtes räumliches Gebiet.

$D$  steht hierbei für die Diffusionskonstante, welche im Allgemeinen ortsunabhängig ist und die Einheit  $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$  hat. Die Diffusionskonstante beeinflusst die Diffusionsstromdichte. Die Größe  $c$  steht für die konvergierende bzw. diffundierende physikalische Größe. Für die nachfolgenden Erklärungen wird als Größe die Teilchenkonzentration mit der Einheit  $\text{mol m}^{-3}$  gewählt. Weitere Größen in der Konvektions-Diffusions-Gleichung sind die Zeit  $t$  mit  $[t] = \text{s}$ , der Ort  $x$  gemessen in der Einheit  $\text{m}$  und die Geschwindigkeit des Flussfeldes  $v$  mit  $[v] = \text{m s}^{-1}$ .

Allgemein werden zum Beschreiben eines physikalischen Prozesses die Anfangsbedingungen, wie die Startkonzentration in gesamten Gebiet und die Geschwindigkeit zu Beginn des Prozesses, benötigt. Außerdem müssen Randbedingungen am Gebietsrand ergänzt werden.

## 2.3 Numerik

Physikalische Systeme lassen sich oft durch kontinuierliche Differentialgleichungen, wie die Konvektions-Diffusions-Gleichung 3, beschreiben. Das Systemverhalten ergibt sich durch die Lösung der Differentialgleichung. Da diese nur für Spezialfälle direkt lösbar ist, werden computergestützte Simulationen benötigt. Dabei wird durch numerische Verfahren eine Näherungslösung bestimmt. Dieses Vorgehen basiert auf einer Diskretisierung in Raum und Zeit, da Computer nur diskrete Werte verarbeiten können.

### 2.3.1 1D-Fall

Das Simulationsfeld ist eine Zeile gleichgroßer, quadratischer Zellen mit der Gitterweite  $\Delta x$ , auch äquidistantes Gitter genannt. Die Konzentration  $c$  ist in der gesamten Zelle gleich groß. Der Wert wird im Mittelpunkt gespeichert (siehe Abbildung 4).

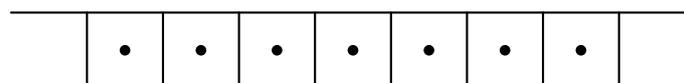


Abb. 4: Äquidistantes Gitter in 1D. Die Konzentration wird im Knoten einer Zelle gespeichert und ist in der gesamten Zelle gleich groß.

### 2.3.1.1 Diffusion

Im Folgenden wird Konvektion ignoriert, um den reinen Diffusionsteil herzuleiten. Zu Beginn der Simulation werden bestimmte Zellen auf eine höhere Konzentration als der umliegende Bereich gesetzt. Dieser Konzentrationsunterschied führt zu Diffusionsströmen, die durch Flüsse beschrieben werden können. Ein Fluss beschreibt in diesem Fall den Konzentrationsfluss zwischen zwei benachbarten Zellen, wie aus Abbildung 5 zu entnehmen ist.

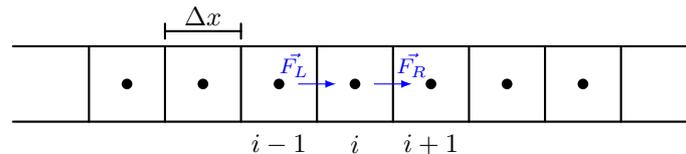


Abb. 5: Diffusionsflüsse in 1D

Betrachtet man eine einzelne Zelle mit dem Index  $i$ , so lässt sich mithilfe der Flüsse die Konzentrationsänderung dieser Zelle beschreiben. Mathematisch lässt sich die Konzentrationsänderung einer Zelle zu einem bestimmten Zeitpunkt  $n$  an einer bestimmten Stelle  $i$  durch folgenden Differenzialquotienten in Gleichung 4 beschreiben.

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} \approx \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} \quad (4)$$

Dabei steht  $c_i^n$  für die Konzentration  $c$  in der Zelle  $i$  im Zeitschritt  $n$ . Zur Berechnung der Konzentrationsänderung dient folgende Formel 5:

$$\frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} = \frac{F_{Dif,R} + F_{Dif,L}}{\Delta x} \quad (5)$$

Dabei sind die Diffusionsflüsse von rechts bzw. links  $F_{Dif,R}$  und  $F_{Dif,L}$  wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} F_{Dif,R} &= D \cdot \frac{c_{i+1} - c_i}{\Delta x} \\ F_{Dif,L} &= -D \cdot \frac{c_i - c_{i-1}}{\Delta x} \end{aligned} \quad (6)$$

Somit kann man die Konzentrationsänderung aufgrund von Diffusion in einer Zelle berechnen. Dies ist der Diffusionsteil der Konvektions-Diffusions-Gleichung.

### 2.3.1.2 Konvektion

Im Folgenden wird Diffusion ignoriert.

Konvektion führt ebenfalls zu Konzentrationsänderungen. Der Konvektionsteil lässt sich ebenfalls durch Flüsse beschreiben.

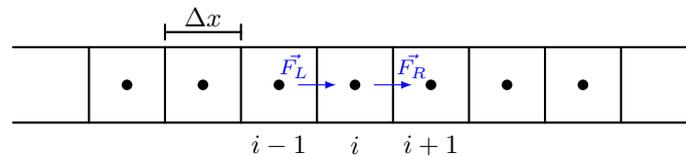


Abb. 6: Konvektionsflüsse in 1D

$$\begin{aligned} F_{Konv,R} &= c_{i+1} \cdot v \\ F_{Konv,L} &= -c_{i-1} \cdot v \end{aligned} \quad (7)$$

Die Konzentrationsänderung durch Konvektion in der Zelle an der Stelle  $i$  lässt sich wie folgt mathematisch ausdrücken [1]:

$$\begin{aligned} \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} + \frac{F_{Konv,R} + F_{Konv,L}}{2\Delta x} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} &= -\frac{F_{Konv,R} + F_{Konv,L}}{2\Delta x} \end{aligned} \quad (8)$$

### 2.3.1.3 Konvektion-Diffusion

Die diskretisierte Konvektions-Diffusions-Gleichung setzt sich aus dem Diffusionsteil 5 und Konvektionsteil 8 zusammen.

$$\frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} = \frac{F_{Dif,R} + F_{Dif,L}}{\Delta x} - \frac{F_{Konv,R} + F_{Konv,L}}{2\Delta x} \quad (9)$$

Aufgelöst mit 6 und 7 ergibt sich aus Gleichung 9:

$$\frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} = D \left( \frac{c_{i+1}^n - 2c_i^n + c_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right) - v \left( \frac{c_{i+1}^n - c_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) \quad (10)$$

Dabei steht  $n$  für den aktuellen Zeitschritt,  $\Delta t$  für die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zeitschritten und  $i$  für die Stelle der Zelle im Raster.

Gleichung 10 lässt sich nach der Konzentration  $c_i^{n+1}$  des nächsten Zeitschritts  $n + 1$  auflösen. Wenn die Nachbarzellen  $i - 1$  und  $i + 1$  gegeben sind, kann man somit  $c_i^{n+1}$  für jede einzelne Zelle  $i$  des Rasters berechnen und erhält ein neues Raster für den nächsten Zeitpunkt  $n + 1$ .

### 2.3.1.4 Randbedingungen

Um die Berechnung des nächsten Zeitschritts mithilfe von Gleichung 10 zu ermöglichen, benötigt jede Zelle zwei Nachbarzellen. Die Randzellen 1 und  $n - 1$  sind jedoch nur von

einer Nachbarzelle und dem Rand begrenzt.

Aus diesem Grund werden die virtuellen Hilfszellen 0 und  $n$  jenseits der Ränder eingeführt.

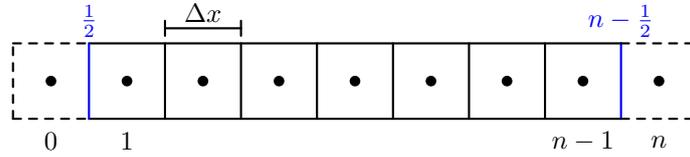


Abb. 7: Darstellung der Hilfszellen

Vor jedem Zeitschritt wird die Konzentration der Hilfszellen berechnet. Dafür verwendet man Gleichung 10, angewendet auf die Ränder.

$$\frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} = 4D \left( \frac{c_{i+1/2}^n - 2c_i^n + c_{i-1/2}^n}{\Delta x^2} \right) - v \left( \frac{c_{i+1/2}^n - c_{i-1/2}^n}{\Delta x} \right) \quad (11)$$

Dabei bezieht sich  $c_i^n$  auf die am Rand gespeicherte Konzentration.  $i + 1/2$  und  $i - 1/2$  bezeichnen die Nachbarzellen des Randes.

Wie aus Abbildung 7 hervorgeht, beträgt der Abstand zwischen Rand und Zellmitten jeweils nur  $\Delta x/2$ .

Da die Ränder statisch sind, wird der Differenzenquotient der Konzentration am Rand mit Null gleichgesetzt.

$$0 = 4D \left( \frac{c_{i+1/2}^n - 2c_i^n + c_{i-1/2}^n}{\Delta x^2} \right) - v \left( \frac{c_{i+1/2}^n - c_{i-1/2}^n}{\Delta x} \right) \quad (12)$$

Im Folgenden wird die Angabe des Zeitschritts  $n$  ausgelassen, da ohnehin alle in den Gleichungen aufgeführten Konzentrationen sich auf ihn beziehen.

Aufgelöst nach der Konzentration  $c_{i-1/2}$  der linken Hilfszelle ergibt sich:

$$c_0 = c_{i-1/2} = \frac{8Dc_{1/2} + (v\Delta x - 4D)c_1}{4D + v\Delta x} \quad (13)$$

Für die Konzentration  $c_{i+1/2}$  der rechten Hilfszelle ergibt sich:

$$c_n = c_{i+1/2} = \frac{8Dc_{n-1/2} - (v\Delta x + 4D)c_{n-1}}{-4D + v\Delta x} \quad (14)$$

In den Gleichungen 13 und 14 kann man als einzige Randbedingung nur die Konzentration  $c_i^n$  am Rand festlegen.

Mithilfe der Robin-Randbedingungen 15 lässt sich zusätzlich die räumliche Ableitung  $c'$  der Konzentration am Rand implementieren.

$$\begin{aligned}\alpha \cdot c_{1/2} - \beta \cdot c'_{1/2} &= \gamma \\ \alpha \cdot c_{n-1/2} + \beta \cdot c'_{n-1/2} &= \gamma\end{aligned}\tag{15}$$

$\alpha$  und  $\beta$  sind dabei von der Art der Simulation abhängige Parameter.

In diskretisierter Form, aufgelöst nach der Konzentration des Randes, ergibt sich:

$$\begin{aligned}c_{1/2} &= \frac{\gamma}{\alpha} + \beta \cdot \frac{c_1 - c_0}{\alpha \Delta x} \\ c_{n-1/2} &= \frac{\gamma}{\alpha} - \beta \cdot \frac{c_n - c_{n-1}}{\alpha \Delta x}\end{aligned}\tag{16}$$

Eingesetzt in Gleichung 13 bzw. 14 ergeben sich folgende Gleichungen:

$$c_0 = \frac{c_1 \cdot (v\alpha\Delta x^2 - 4D(\alpha\Delta x + 2\beta)) + 8D\gamma\Delta x}{v\alpha\Delta x^2 + 4D(\alpha\Delta x + 2\beta)}\tag{17}$$

$$c_n = \frac{c_{n-1} \cdot (-v\alpha\Delta x^2 + 4D(\alpha\Delta x + 2\beta)) + 8D\gamma\Delta x}{v\alpha\Delta x^2 + 4D(\alpha\Delta x - 2\beta)}\tag{18}$$

Vor jedem Zeitschritt werden anhand der Gleichungen 17 und 18 die Konzentrationen der Hilfszellen bestimmt, was eine einheitliche Berechnung aller Zellen ermöglicht.

### 2.3.1.5 Beispiel

Abbildung 8 veranschaulicht die Ergebnisse eines mit Octave geschriebenen Simulationsprogrammes und des Softwarepakets Pace3D [3]. Octave ist eine Programmiersprache zur numerischen Lösung mathematischer Probleme.

Die 80 Zellen des Rasters wurden anfangs auf 0 °C gesetzt. Die Temperatur  $c_{1/2}$  am linken Rand wurde auf 0 °C gesetzt, während der rechte Rand  $c_{n-1/2}$  die Temperatur 1 °C hat. Die räumlichen Ableitungen der Temperatur an den Rändern betragen 0.

Im Diagramm 8 sind die Konzentrationen aller 82 Zellen im Gleichgewichtszustand abgetragen. Zelle 0 und 81 sind die beiden Hilfszellen.

Die blaue Kurve beschreibt den mithilfe von Octave berechneten Temperaturverlauf, während die gestrichelte Linie die mithilfe von Pace berechneten Simulationsergebnisse darstellt. In beiden Fällen liegt ein laminarer Strom der Geschwindigkeit  $v = 20 \text{ cm s}^{-1}$  von links vor. Bei dem roten Graphen liegt kein Strom vor.

Wie aus dem Diagramm hervorgeht, ist die Temperatur  $c_{81}$  der rechten Hilfszelle größer als 1 °C, da sie an die räumliche Ableitung der Temperatur angepasst ist. Dies ist nötig, um den Rand nach Gleichung 18 akkurat zu simulieren.

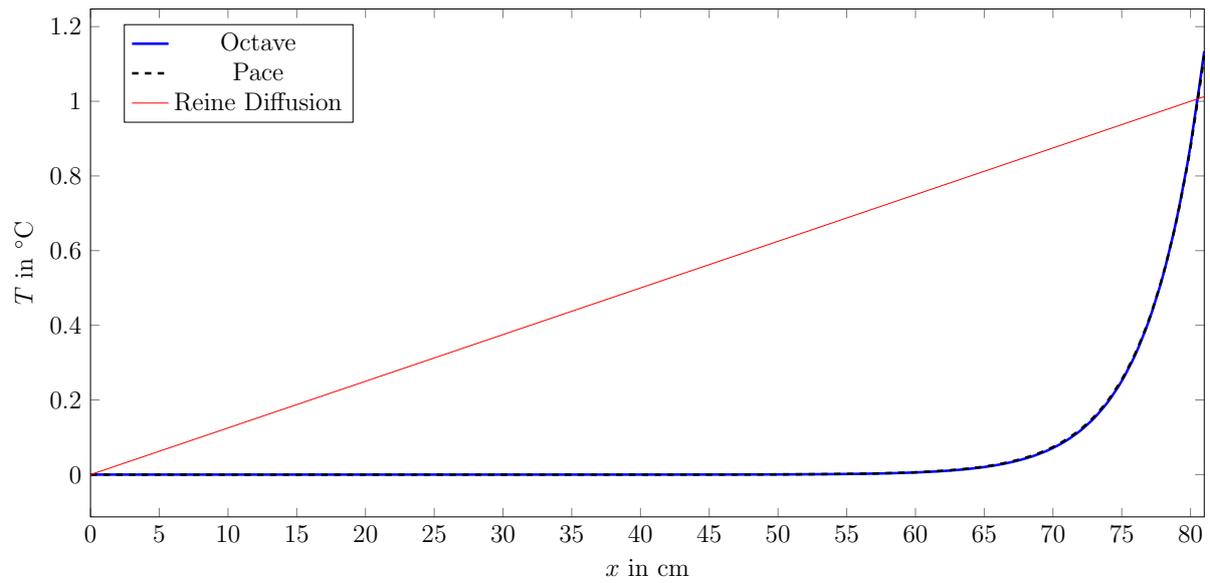


Abb. 8: Veranschaulichung der 2D-Simulationsergebnisse von Octave und Pace;  
 $v = 20 \text{ cm s}^{-1}$ ,  $c_{1/2} = 0 \text{ °C}$ ,  $c_{n-1/2} = 1 \text{ °C}$

### 2.3.2 2D-Fall

Für den 2D-Fall ist das Simulationsfeld ein  $(n - 1) \times (m - 1)$  großes, äquidistantes Gitter, bestehend aus gleich großen, quadratischen Zellen der Seitenlänge  $\Delta x = \Delta y$ , wie in Abbildung 9 dargestellt.

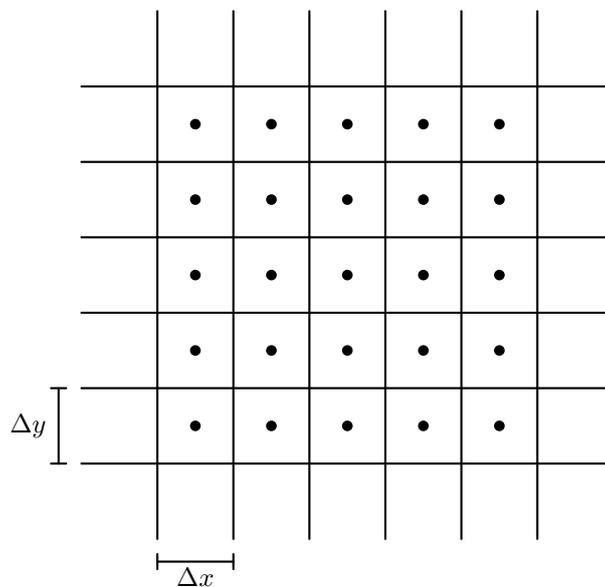


Abb. 9: 2D-Raster

### 2.3.2.1 Konvektion-Diffusion

Im 2-dimensionalen Raum gibt es zusätzlich zu den Flüssen in x-Richtung auch entsprechende Flüsse in y-Richtung, wie Abbildung 10 veranschaulicht. Dabei repräsentiert ein Pfeil sowohl den Diffusionsfluss als auch den Konvektionsfluss.

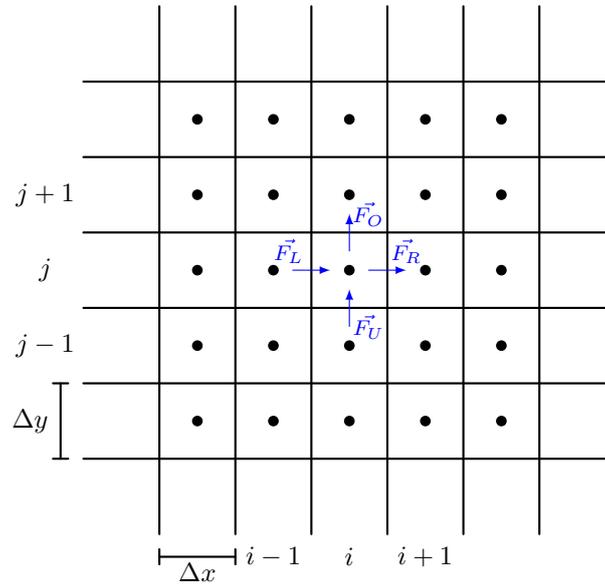


Abb. 10: Flüsse in 2D

Somit ergibt sich für die 2D-Konvektions-Diffusions-Gleichung folgende Gleichung:

$$\frac{c_{i,j}^{n+1} - c_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{F_{Dif,R} + F_{Dif,L}}{\Delta x} + \frac{F_{Dif,O} + F_{Dif,U}}{\Delta y} - \frac{F_{Konv,R} + F_{Konv,L}}{2\Delta x} - \frac{F_{Konv,O} + F_{Konv,U}}{2\Delta y} \quad (19)$$

Die Diffusionsflüsse sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} F_{Dif,L} &= -D \cdot \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{\Delta x} \\ F_{Dif,R} &= D \cdot \frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{\Delta x} \\ F_{Dif,U} &= -D \cdot \frac{c_{i,j} - c_{i,j-1}}{\Delta y} \\ F_{Dif,O} &= D \cdot \frac{c_{i,j+1} - c_{i,j}}{\Delta y} \end{aligned} \quad (20)$$

Für die Konvektionsflüsse gilt:

$$\begin{aligned}
 F_{Konv,L} &= -c_{i-1,j} \cdot \vec{v}_x \\
 F_{Konv,R} &= c_{i+1,j} \cdot \vec{v}_x \\
 F_{Konv,U} &= -c_{i,j-1} \cdot \vec{v}_y \\
 F_{Konv,O} &= c_{i,j+1} \cdot \vec{v}_y
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

### 2.3.2.2 Randbedingungen

Analog zum 1D-Fall dienen folgende Gleichungen zur Berechnung der Werte in den Randzellen. Dabei werden wieder Robin-Randbedingungen 15 verwendet.

$$\begin{aligned}
 c_{0,j} &= \frac{c_{1,j} \cdot (\vec{v}\alpha\Delta x^2 - 4D(\alpha\Delta x + 2\beta)) + 8D\gamma\Delta x}{\vec{v}\alpha\Delta x^2 + 4D(\alpha\Delta x + 2\beta)} \\
 c_{n,j} &= \frac{c_{n-1,j} \cdot (-\vec{v}\alpha\Delta x^2 + 4D(\alpha\Delta x + 2\beta)) + 8D\gamma\Delta x}{\vec{v}\alpha\Delta x^2 + 4D(\alpha\Delta x - 2\beta)} \\
 c_{i,0} &= \frac{c_{i,1} \cdot (\vec{v}\alpha\Delta y^2 - 4D(\alpha\Delta y + 2\beta)) + 8D\gamma\Delta y}{\vec{v}\alpha\Delta y^2 + 4D(\alpha\Delta y + 2\beta)} \\
 c_{i,m} &= \frac{c_{i,m-1} \cdot (-\vec{v}\alpha\Delta y^2 + 4D(\alpha\Delta y + 2\beta)) + 8D\gamma\Delta y}{\vec{v}\alpha\Delta y^2 + 4D(\alpha\Delta y - 2\beta)}
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

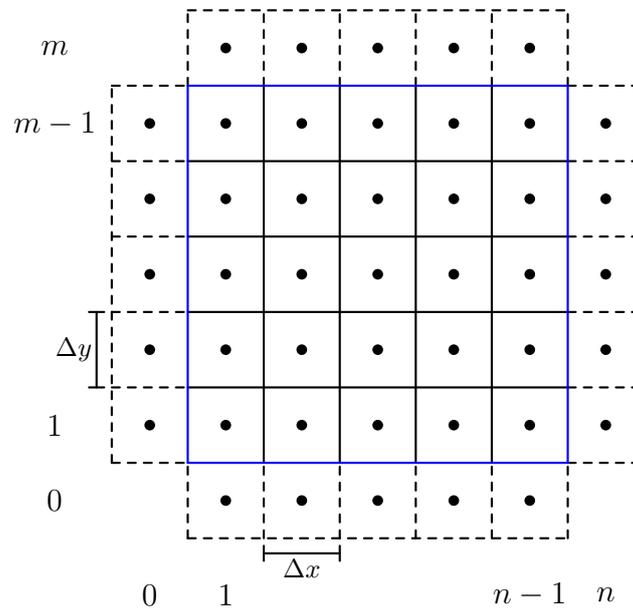


Abb. 11: 2D-Raster mit Hilfszellen

### 2.3.2.3 Beispiel

Die Konvektion-Diffusion wurde, wie schon für 1D, mit einem in Octave [5] geschriebenen Programm simuliert.

Alle Zellen des  $80 \times 80$  großen Rasters der Seitenlänge 1 m werden anfangs auf  $0^\circ\text{C}$  gesetzt. Wie schon im 1D-Beispiel betragen die räumlichen Ableitungen der Temperatur an allen Rändern 0. Der linke und obere Rand werden auf  $0^\circ\text{C}$  gesetzt, während der rechte und untere Rand als Randbedingung  $1^\circ\text{C}$  haben.

Hinzu kommt ein konstanter Strom. Seine horizontale und vertikale Geschwindigkeit beträgt  $20\text{ cm/s}$ , sodass der Strom diagonal von der links oberen Ecke in die rechts untere Ecke verläuft.

Die Hilfszellen wurden in der farbigen Darstellung [12](#) des Simulationsergebnisses ignoriert.

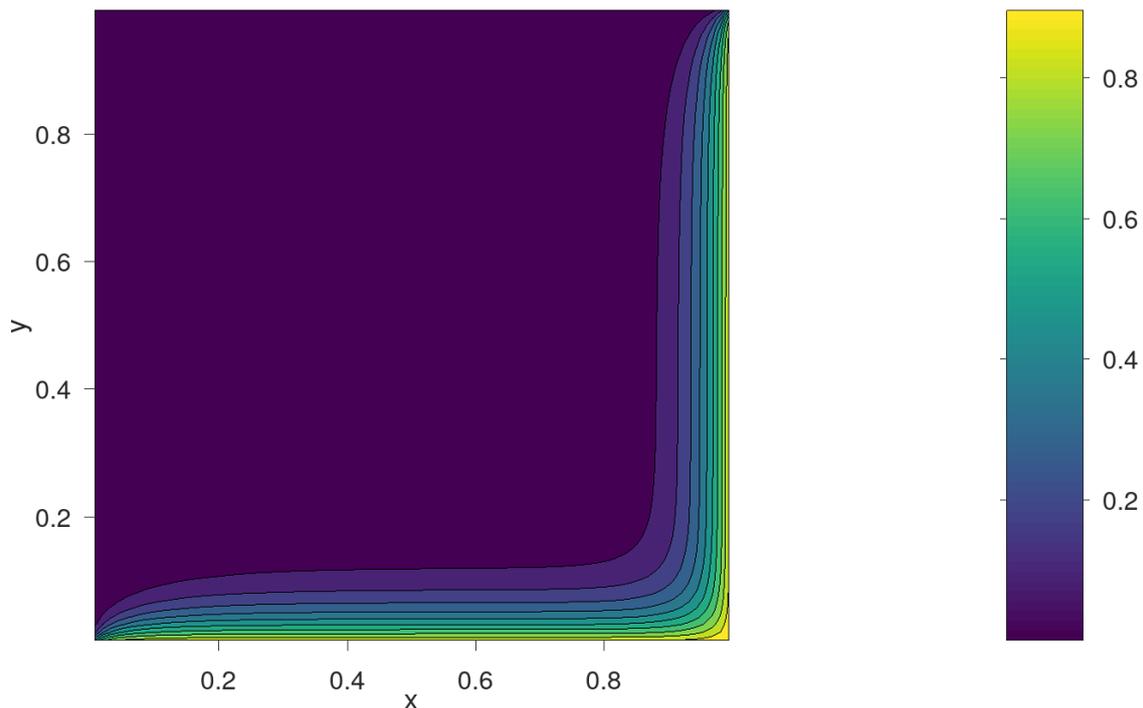


Abb. 12: Farbige Darstellung der Temperatur zum Zeitpunkt  $t = 53\text{ s}$  mit Farbskala [18](#).

Helle, gelbe Töne stellen Wärme dar, während dunkle, blaue Töne für Kälte stehen. Analog zum 1D-Beispiel [8](#) erstreckt sich der Temperaturgradient vom heißen unteren und rechten Rand über eine relativ kurze Strecke. Das liegt daran, dass der von links oben nach rechts unten diagonal verlaufende Strom die weitere Ausbreitung des Temperaturgefälles bis zum kalten linken und oberen Rand verhindert.

## 3 Simulationsergebnisse

Zur Simulation von Rayleigh-Bénard-Konvektion in 2D wurde im Folgenden das Softwarepaket Pace3D [3] verwendet. Das Simulationsprogramm basiert auf den im Theorieteil eingeführten Gleichungen. Sämtliche Grafiken wurden mit VisIt [13] erstellt.

### 3.1 Räumliche Anordnung von Rayleigh-Bénard-Zellen

#### 3.1.1 Simulationsumgebung

Die Rayleigh-Zahl beträgt im folgenden den Wert  $Ra = 10\,000$ . Dies entspricht einem Wert der größer ist, als die kritische Rayleigh-Zahl ( $Ra_c = 1707$ ).

Alle weiteren Parameter sind in Tabelle 13 zusammengefasst.

Rayleigh-Zahl	$Ra$	10 000
Prandtl-Zahl	$Pr$	900
Grashof-Zahl	$Gr$	11,111
Dichte	$\rho$	$1,204 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-3}$
Viskosität	$\mu$	$3,807 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$
Schwerebeschleunigung	$g$	$1 \text{ m s}^{-2}$
Temperatur oberer Rand	$T_{oben}$	273 K
Temperatur unterer Rand	$T_{unten}$	274 K
spezif. Wärmekapazität	$c$	$1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1}$
Wärmeleitfähigkeit	$k$	$0,014 \text{ m kg s}^{-3} \text{ K}^{-1}$
Temperaturleitfähigkeit	$\alpha$	$11,628 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
Länge	$l_x$	8 m
Höhe	$l_y$	1 m
Breite	$l_z$	1 m
Zellenanzahl in $x$ -Richtung	$n_x$	480
Zellenanzahl in $y$ -Richtung	$n_y$	60
Zellenanzahl in $z$ -Richtung	$n_z$	1

Abb. 13: Parameter

Dabei steht  $n$  für die Anzahl an Zellen, in die das  $8 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$  große Simulationsfeld in der jeweiligen Dimension unterteilt wurde. Da für die Simulation Pace3D

verwendet wird, gibt es eine zusätzliche, für das Ergebnis irrelevante, dritte Dimension in  $z$ -Richtung.

Als Randbedingung wird der untere Rand auf die Temperatur  $T_{unten} = 274$  K gesetzt. Die Anfangbedingung für die Temperatur beträgt 273 K.

Der linke und rechte Rand werden als *periodisch* festgelegt. Diese Art von Rändern wird in Simulationen verwendet, in denen ein kleiner Ausschnitt eines großen Systems simuliert werden soll. Dabei taucht Flüssigkeit, die den Rand überschreitet, am gegenüberliegenden Rand wieder auf, sodass es sich hier um ein geschlossenes System handelt. Anschaulich betrachtet, entspricht das Simulationsfeld der Mantelfläche eines Zylinders.

Der obere und untere Rand werden auf *no slip* gesetzt, sodass die Geschwindigkeit an diesen Rändern 0 beträgt. Dies ist nötig, da in Realität die Geschwindigkeit an den Rändern aufgrund von großer Reibung ebenfalls 0 ist.

Als *slip* Ränder haben der vordere und hintere Rand keinen Einfluss auf das Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit. Sie dienen lediglich als Begrenzung der Simulationsumgebung.

### 3.1.2 Ergebnisse

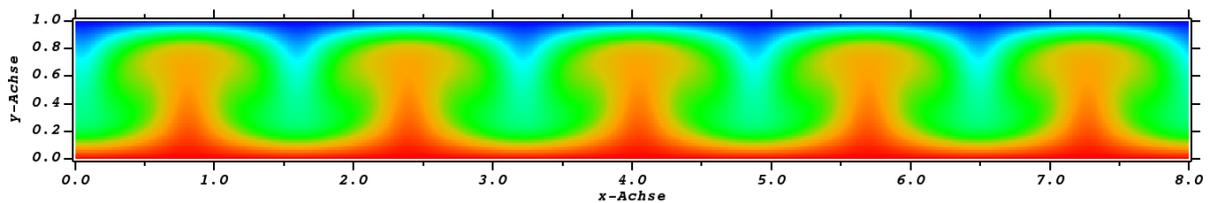


Abb. 14: Darstellung der Temperatur mit Farbskala 18.

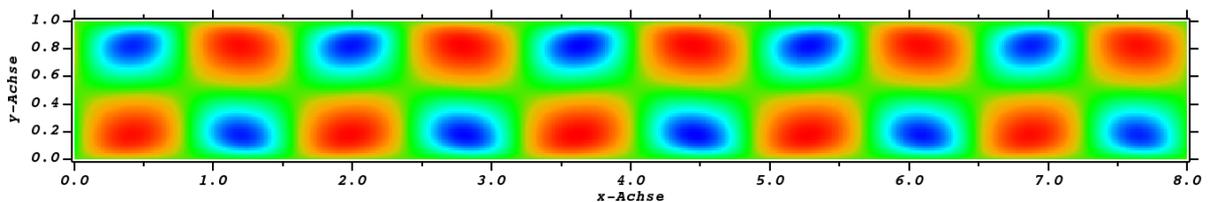


Abb. 15: Farbige Darstellung der horizontalen Geschwindigkeitskomponente  $u$  mit Farbskala 19.

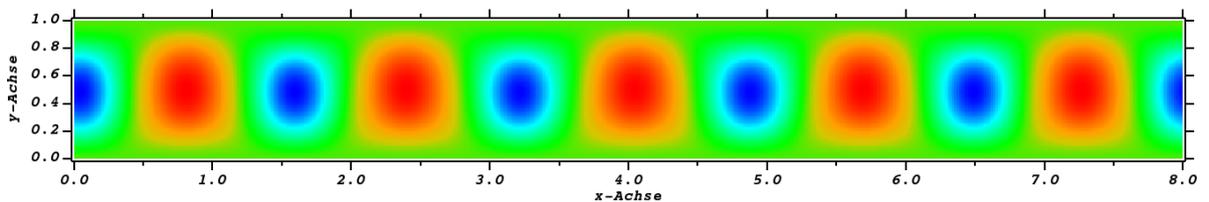


Abb. 16: Farbige Darstellung der vertikalen Geschwindigkeitskomponente  $v$  mit Farbskala 20.

Abb. 17: Stationärer Zustand zum Zeitpunkt  $t = 100$  s.

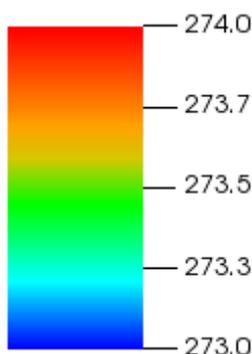


Abb. 18:  $T$  in K

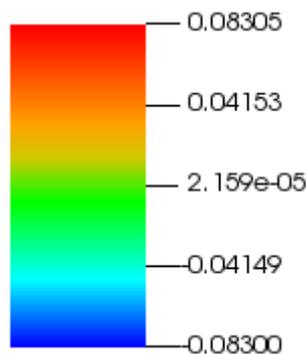


Abb. 19:  $u$  in  $\text{m s}^{-1}$

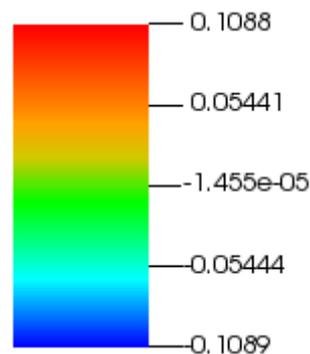


Abb. 20:  $v$  in  $\text{m s}^{-1}$

Abb. 21: Skalen für die Temperatur  $T$ , die vertikale Geschwindigkeit  $v$  und die horizontale Geschwindigkeit  $u$ .

In Abbildung 14 sind fünf gleich große „Pilze“ zu erkennen. Dabei steigt warme Flüssigkeit in der Mitte eines solchen Pilzes auf, während kalte Flüssigkeit an den Rändern des Pilzes absinkt, wie sich aus Abbildung 16 entnehmen lässt. In Abbildung 15 ist zu sehen, dass jeder vertikale Strom sich an den horizontalen Begrenzungen in zwei horizontale Ströme aufteilt.

Somit liegt eine Abfolge von zehn sich abwechselnd im und gegen den Uhrzeigersinn drehenden Rayleigh-Bénard-Zellen vor. Die  $x$ -Koordinaten der Drehzentren sind in Tabelle 22 enthalten. Alle Drehachsen haben die  $y$ -Koordinate 0.5.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$
0,45	1,25	2,05	2,85	3,56	4,45	5,25	6,05	6,85	7,65

Abb. 22:  $x$ -Koordinaten der Drehzentren der Zellen

Die Zellen sind symmetrisch zur Spiegelachse entlang  $x = 4,05$  angeordnet.

In den Abbildungen 23 und 26 sind die Temperaturen des Systems zu zwei verschiedenen Zeitpunkten dargestellt, in denen der stationäre Zustand noch nicht erreicht ist.

Bis zum Zeitpunkt  $t = 37$  s haben sich zwei Pilze an den Positionen  $x = 0,8$  und  $x = 7,4$  gebildet, wie in Abbildung 23 zu sehen ist. In diesen Bereichen liegen bereits vertikale und horizontale Strömungen vor, wie aus den Abbildungen 24 und 25 hervorgeht.

Insgesamt liegen also vier Rayleigh-Bénard-Zellen vor. Im mittleren Bereich von der Grafik 23 ist ein konstantes Temperaturgefälle zu sehen.

Zum Zeitpunkt  $t = 53$  s liegen insgesamt 8 Rayleigh-Bénard-Zellen vor, wie aus Abbildung 26 zu entnehmen ist. Im mittleren Bereich  $3,0 < x < 6,0$  liegt weiterhin ein lineares Temperaturgefälle über die Höhe vor.

### 3.1.3 Diskussion

Eine Störung kann zu einem warmen, vertikal nach oben gerichteten Konvektionsstrom führen, wenn  $Ra > Ra_c$  gilt. Dies ist hier mit  $Ra = 10\,000$  der Fall. Dieses Phänomen wird im Abschnitt 2.1.2 des Theorieteils erklärt.

In der vorliegenden Simulation entstehen zunächst an den  $x$ -Stellen 0,8 und 7,3 zwei derartige Konvektionsströme, wie aus Abbildung 23 zu entnehmen ist. Diese führen nach dem im Abschnitt 3.2 erläuterten Prinzip direkt zum Entstehen von je zwei Rayleigh-Bénard-Zellen.

Dagegen setzt sich im mittleren Bereich zwischen  $x = 1,5$  und  $x = 6,5$  der Diffusionsvorgang fort.

Die vertikalen Konvektionsströme an den Stellen  $x = 1,5$  und  $x = 6,7$  werden zu diesem Zeitpunkt nicht von zwei Konvektionszellen begrenzt. Da sich jeder vertikale Strom sowohl am Boden als auch an der Decke in zwei horizontale Ströme aufteilt, wie aus den Darstellungen 24 und 25 hervorgeht, entstehen hierbei neue horizontale Konvektionsströme. In Abbildung 25 entsteht nach diesem Prinzip durch den vertikalen Konvektionsstrom an der Stelle  $x = 1,5$  in Bodennähe ein neuer Strom nach rechts und an der Decke ein Strom nach links. Dies führt zur Bildung einer neuen Rayleigh-Bénard-Zelle an der Stelle  $x = 2,0$ . Auf gleiche Art und Weise formt sich an der  $x$ -Stelle 6,0 eine neue Zelle.

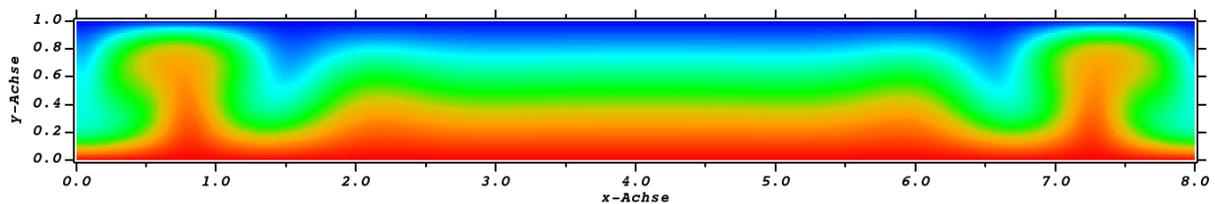


Abb. 23: Farbige Darstellung der Temperatur zum Zeitpunkt  $t = 37$  s mit Farbskala 18.

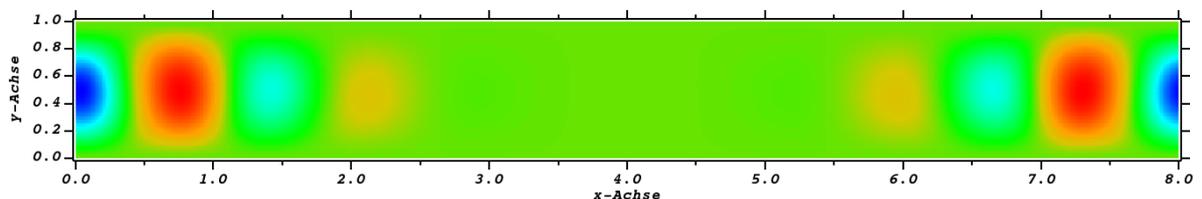


Abb. 24: Farbige Darstellung der vertikalen Geschwindigkeitskomponente  $v$  zum Zeitpunkt  $t = 37$  s mit Farbskala 20.

Nach diesem Prinzip entstehen solange neue Konvektionszellen, bis die Abfolge an Zellen die gesamte horizontale Länge einnimmt. In Abbildung 26 ist zu sehen, wie in der Mitte die letzten beiden Zellen entstehen.

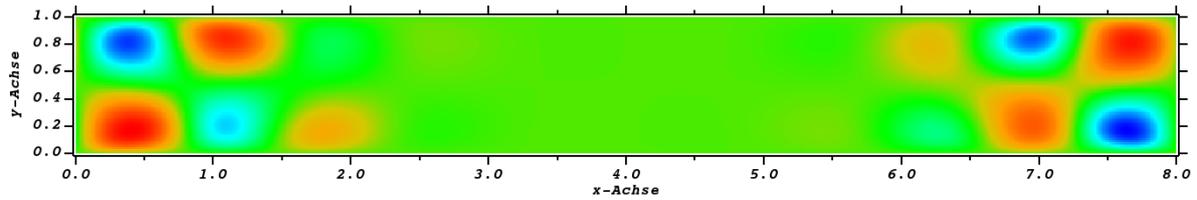


Abb. 25: Farbige Darstellung der horizontalen Geschwindigkeitskomponente  $u$  zum Zeitpunkt  $t = 37$  s mit Farbskala 19.

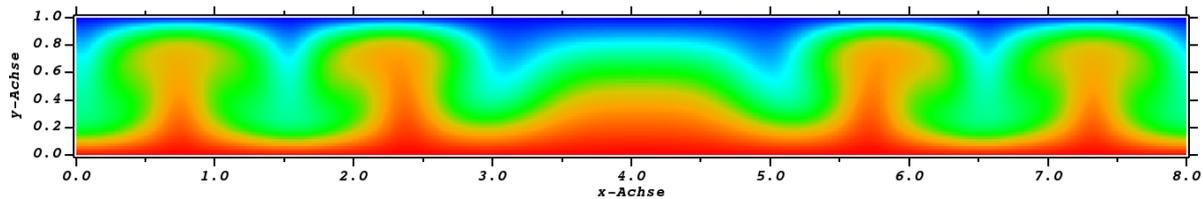


Abb. 26: Farbige Darstellung der Temperatur zum Zeitpunkt  $t = 53$  s mit der Farbskala 18.

Die Spiegelachse des Systems befindet sich nicht zwangsweise in der Mitte, da das System aufgrund der *periodischen* vertikalen Ränder kein Bestreben danach hat. Durch die *periodischen* Ränder entspricht das Simulationsfeld der Mantelfläche eines Zylinders. Somit spielt die Verschiebung der Zellen in horizontaler Richtung keine Rolle.

Zusammenfassend geht aus der Diskussion der Ergebnisse hervor, dass die Rayleigh-Bénard-Zellen nacheinander entstehen, bis das gesamte Simulationsfeld ausgefüllt ist. Dabei ist die Asymmetrie der Anordnung ohne Relevanz.

## 3.2 Analyse des Geschwindigkeitsfeldes

### 3.2.1 Simulationsumgebung

Zur Analyse des Geschwindigkeitsfeldes werden alle Parameter von der obigen Simulation übernommen. Lediglich die Länge wird auf  $l_x = 2$  geändert, womit  $n_x = 120$  gilt.

### 3.2.2 Ergebnisse

Die Simulationsergebnisse für die Temperatur im stationären Zustand zum Zeitpunkt  $t = 100$  s sind sowohl farbig (Abbildung 27), als auch in Konturlinien (Abbildung 28) dargestellt.

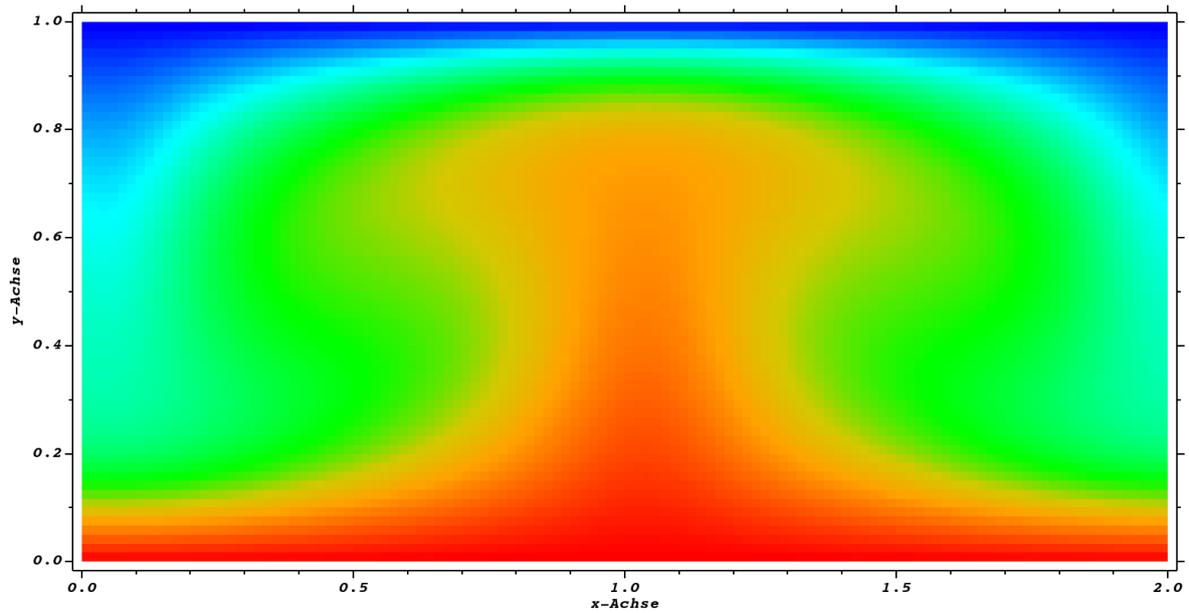


Abb. 27: Farbige Darstellung der Temperatur im stationären Zustand nach 100 s mit Farbskala 31.

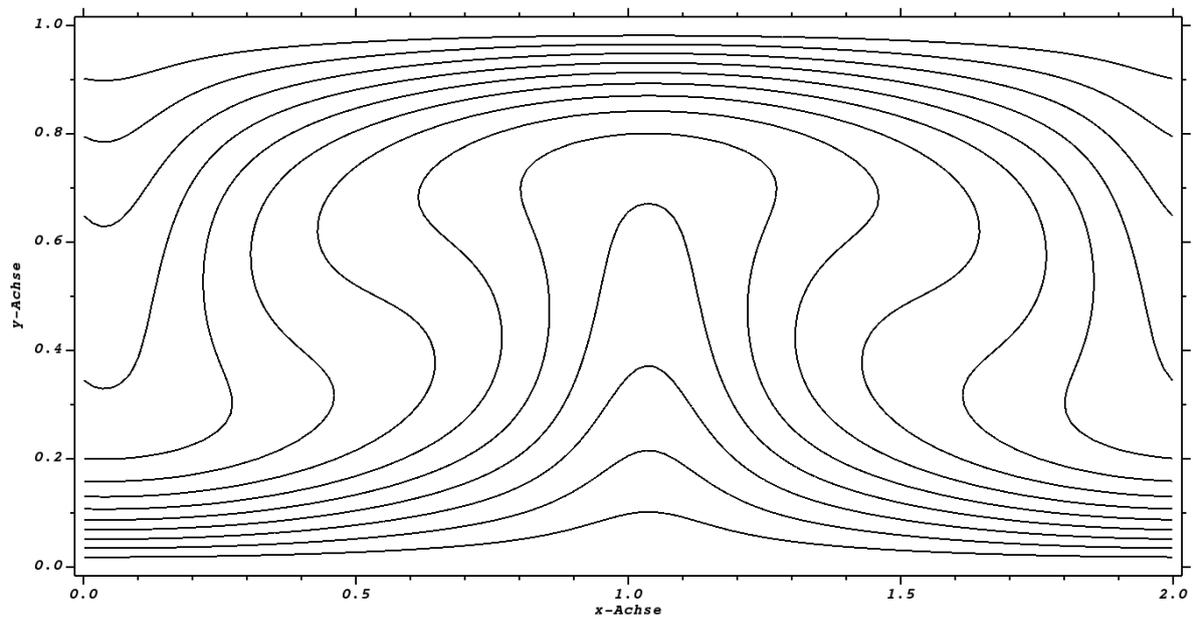


Abb. 28: Darstellung der Temperatur im stationären Zustand nach 100 s mittels Konturlinien. Die Temperatur entlang einer Isolinie ist gleich.

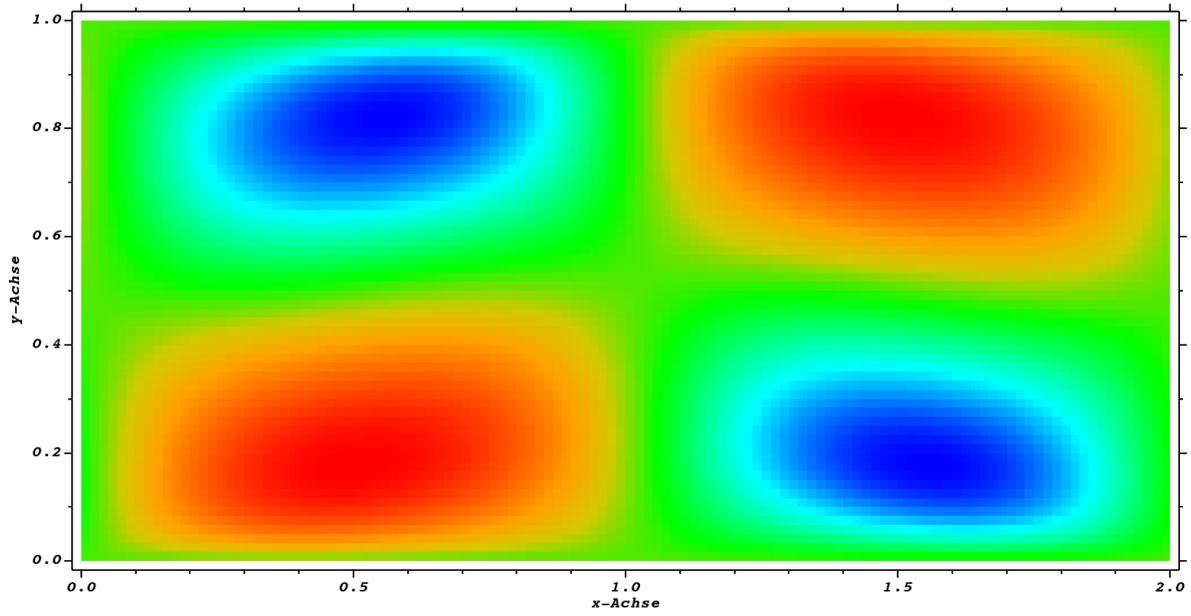


Abb. 29: Farbige Darstellung der Geschwindigkeit  $u$  in  $x$ -Richtung mit Farbskala 32.

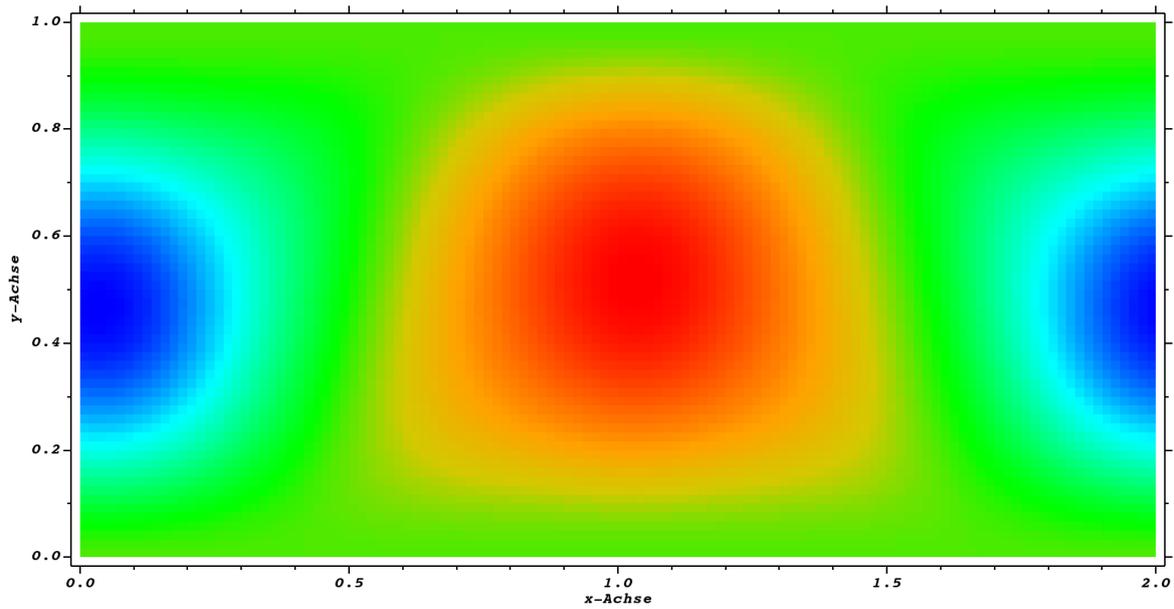


Abb. 30: Farbige Darstellung der Geschwindigkeit  $v$  in  $y$ -Richtung mit Farbskala 33.

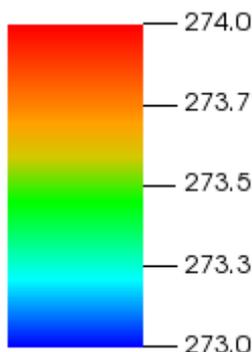


Abb. 31:  $T$  in K

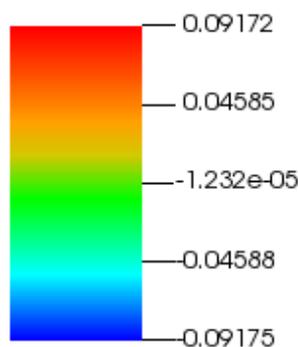


Abb. 32:  $u$  in  $\text{m s}^{-1}$

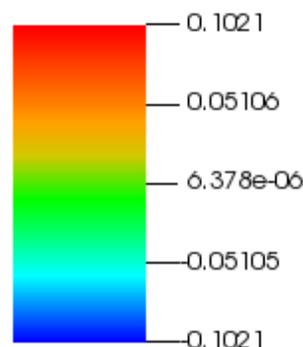


Abb. 33:  $v$  in  $\text{m s}^{-1}$

Abb. 34: Skalen für die Temperatur  $T$ , die vertikale Geschwindigkeit  $v$  und die horizontale Geschwindigkeit  $u$ .

Wie aus den Abbildungen 27, 28 und 30 hervorgeht, gibt es an der Stelle  $x = 1$  einen warmen Konvektionsstrom nach oben. An der oberen Begrenzung teilt er sich in zwei Ströme auf, die nach links bzw. rechts fließen, wie in Abbildung 29 zu sehen ist. An den Stellen  $x = 0$  bzw.  $x = 2$  fließen diese beiden Strömungen jeweils wieder nach unten (Abbildung 30), bis sie am Boden in horizontaler Richtung (Abbildung 29) wieder in Richtung des mittig platzierten vertikalen Konvektionsstromes fließen.

Das Ergebnis sind zwei benachbarte Rayleigh-Bénard-Zellen, in denen die Flüssigkeit in entgegengesetzten Richtungen zirkuliert. Ihre Drehachsen befinden sich an den Positionen  $(0,55|0,5)$  bzw.  $(1,55|0,5)$ .

### 3.2.3 Diskussion

Konvektion ist im Fall  $Ra > Ra_c$  erwartungsgemäß eingetreten. Wie im Theorieteil erklärt, benötigt man für das Einsetzen von Konvektion zunächst eine Störung. In der Simulation entsteht automatisch ein Konvektionsstrom nach oben, da die durch die Diskretisierung verursachten Ungenauigkeiten zu Inhomogenitäten führen.

Wie aus Abbildung 30 zu entnehmen ist, hat jener Strom in halber Höhe, genauer an der Position  $(1,05|0,5)$ , die höchste vertikale Geschwindigkeit. Das liegt zum einen daran, dass der Geschwindigkeitsvektor an dieser Stelle senkrecht nach oben zeigt, sodass die vertikale Geschwindigkeit dem gesamten Geschwindigkeitsbetrag entspricht. Entsprechend lassen sich die anderen maximalen horizontalen bzw. vertikalen Geschwindigkeiten in den Abbildungen 29 und 30 erklären. Da eine Rayleigh-Bénard-Zelle ein Kreislauf ist, ist die Geschwindigkeit überall im Zyklus nahezu gleich. Zum anderen erfährt die warme Flüssigkeit nach dem Archimedischen Prinzip einen Auftrieb, was die leicht unterschiedlichen maximalen Geschwindigkeiten  $u_{max} = 0,09 \text{ m s}^{-1}$  (vgl. Abb. 32) und  $v_{max} = 0,1 \text{ m s}^{-1}$  (vgl. Abb. 33) erklärt.

Beim Aufsteigen wird der warme Strom durch die kühlere Umgebung in horizontaler

Richtung abgekühlt.

Durch die obere Begrenzung wird der Strom gezwungen, nach links oder rechts auszuweichen (vgl. Abb. 29). Deshalb zirkulieren zwei benachbarte Rayleigh-Bénard-Zellen immer in entgegengesetzten Richtungen.

Die Konvektion wird an der Decke wegen der Trägheit der gesamten zirkulierenden Masse aufrecht erhalten. Entlang des kühlen oberen Randes kühlt die strömende Flüssigkeit so weit ab, bis sie kälter als die Umgebung ist. Aufgrund des Archimedischen Prinzips [4] beginnt die dichtere Flüssigkeit zu sinken. Dies geschieht in der Nähe der vertikalen Begrenzungen, wie in Abbildung 30 zu sehen ist. Dabei wird sie durch die wärmere Umgebung erwärmt.

Am Boden angekommen, werden die beiden Ströme wiedermals gezwungen in horizontale Richtung auszuweichen. Während der Bewegung hin zur Mitte erwärmt der warme Boden die Flüssigkeit wieder ausreichend, sodass die Flüssigkeit nach dem Archimedischen Prinzip durch die geringere Dichte im zentralen Konvektionsstrom an der Stelle  $x = 1$  wieder aufsteigt.

Das Ergebnis dieser Konvektion sind die Rayleigh-Bénard-Zellen. Durch die periodischen, vertikalen Ränder sind diese beiden Zellen nur ein Ausschnitt aus einer Kette von Rayleigh-Bénard-Zellen.

Die oben aufgeführten, grafischen Simulationsergebnisse stimmen in zufriedenstellendem Maße mit Ergebnissen aus den Publikationen [8] und [14] überein.

### 3.2.4 Validierung

In einer perfekten Simulationsumgebung lassen sich die Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$  durch Sinus- bzw. Cosinusfunktionen beschreiben [6].

Um die Qualität der Simulationsergebnisse zu bewerten, wird im Folgenden das Geschwindigkeitsfeld genauer untersucht und mit der Theorie verglichen.

Wie aus dem Diagramm 35 hervorgeht, ähnelt der Verlauf der vertikalen Geschwindigkeitskomponente  $v$  entlang des Querschnitts durch die Zentren der beiden Rayleigh-Bénard-Zellen der folgenden Cosinusfunktion 23. Hierbei wird das Bogenmaß verwendet.

$$f(x) = -0,102 \cdot \cos(0,05 \cdot (x - 3)) \quad (23)$$

Aus Gleichung 23 ist zu entnehmen, dass der Hochpunkt die  $x$ -Koordinate 63 hat. Dementsprechend befindet sich der vertikal nach oben gerichtete Konvektionsstrom an der Stelle  $x = 63$ . Somit sind die beiden Zellen im Simulationsfeld nicht symmetrisch angeordnet. Da jedoch diese beiden Zellen nur einen Ausschnitt von mehreren Rayleigh-Bénard-Zellen darstellen sollen, ist es nicht weiter von Bedeutung.

Darüber hinaus ist zu sehen, dass die Nullstellen der beiden Graphen übereinstimmen. Somit ist die Position der Drehachsen der beiden Zellen, in denen die Geschwindigkeit 0

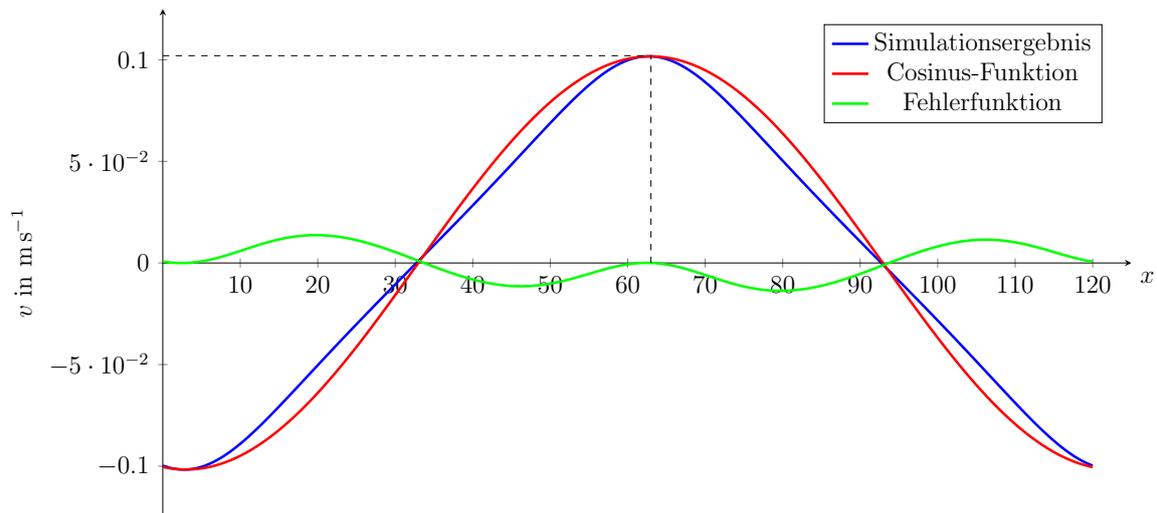


Abb. 35: Vertikale Geschwindigkeit  $v$  entlang des horizontalen Querschnitts an der Stelle  $y = l_y/2 = 0,5$ .

beträgt, in der obigen Simulation 27 korrekt.

Wie der Fehlerfunktion zu entnehmen ist, weicht der Graph der Simulationsergebnisse nur geringfügig vom theoretischen Verlauf ab.

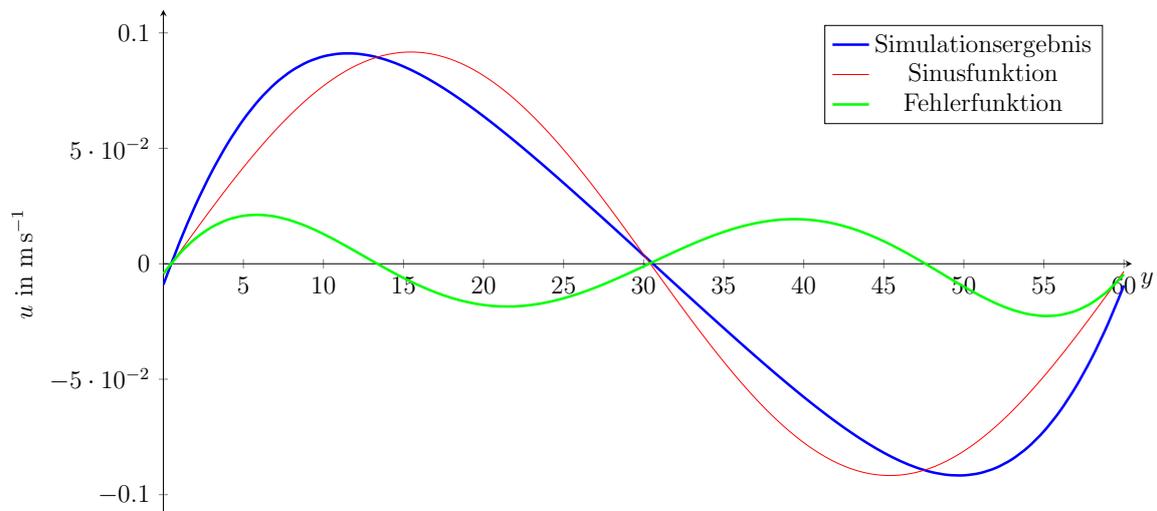


Abb. 36: Horizontale Geschwindigkeit  $u$  entlang des vertikalen Querschnitts durch die Mitte der linken Rayleigh-Bénard-Zelle an der Stelle  $x = 0,55$ .

Wie aus dem Diagramm 36 hervorgeht, ähnelt der Verlauf der horizontalen Geschwindigkeitskomponente  $u$  entlang des Querschnitts durch das Zentrum der linken Rayleigh-Bénard-Zelle der folgenden Sinusfunktion im Bogenmaß:

$$f(x) = 0,09172 \cdot \sin(0,1 \cdot (x - 0,5)) \quad (24)$$

Aus dem Vergleich des Graphen der Simulationsergebnisse mit dem theoretischen Verlauf der Geschwindigkeit ergibt sich, dass die stärksten horizontalen Strömungen in der

Simulation zu weit von der Drehachse der Zelle entfernt sind.

Der von der Fehlerfunktion mit der  $x$ -Achse eingeschlossene Flächeninhalt ist größer als bei der Fehlerfunktion der vertikalen Geschwindigkeit  $v$  im Diagramm 35. Somit weicht der Verlauf von  $u$  stärker vom theoretischen Verlauf ab.

Erfreulich ist, dass die Lage der Drehachse der linken Zelle korrekt ist, da beide Graphen die Nullstelle 33 haben.

Aus der Validierung der beiden Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$  ergibt sich, dass die Simulation mit Pace3D akkurat ist und dazu taugt Rayleigh-Bénard-Konvektion realitätsnah zu simulieren.

### 3.3 Analyse verschiedener Rayleigh-Zahlen

#### 3.3.1 Simulationsumgebung

Zur Analyse des Geschwindigkeitsfeldes werden alle Parameter aus dem Abschnitt 3.2 übernommen. Lediglich die Rayleigh-Zahl wird verändert.

#### 3.3.2 Ergebnisse

In Figur 41 sind die Temperaturen im stationären Zustand für verschiedene Rayleigh-Zahlen anhand von Konturlinien dargestellt.

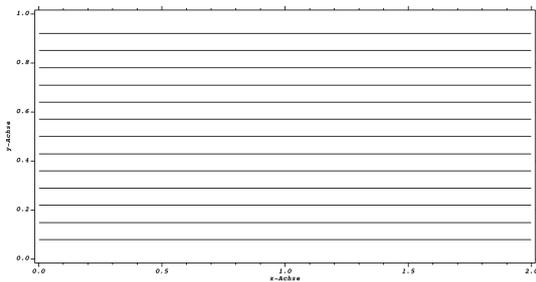


Abb. 37:  $Ra = 1650$

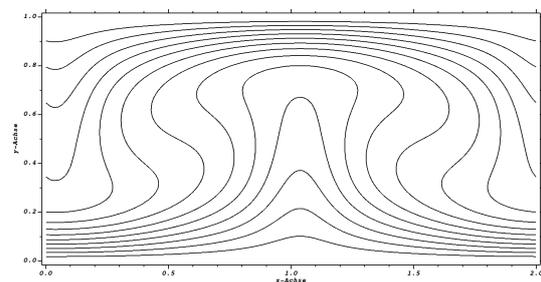


Abb. 38:  $Ra = 10\,000$

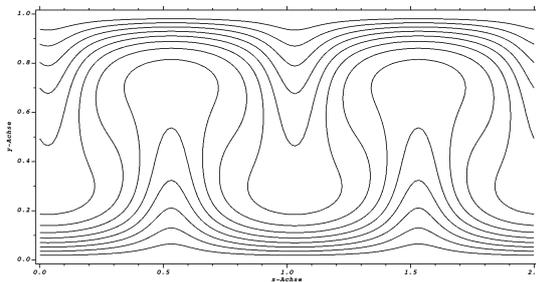


Abb. 39:  $Ra = 20\,000$

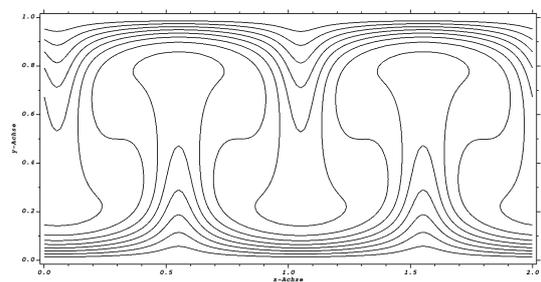


Abb. 40:  $Ra = 50\,000$

Abb. 41: Darstellung der Temperatur im stationären Zustand für verschiedenen Rayleigh-Zahlen anhand von Isolinien. Eine Isolinie ist die Menge aller Punkte einer bestimmten Temperatur.

In Abbildung 37 ist das Ergebnis für die  $Ra$ -Zahl 1650 dargestellt. Hierbei sind alle Isolinien parallel zur Höhe und haben denselben Abstand voneinander.

Aus Abbildung 38 ist zu entnehmen, dass sich zwei Rayleigh-Bénard-Zellen für die Rayleigh-Zahl 10 000 gebildet haben.

Für die Rayleigh-Zahl 20 000 ist aus Figur 39 zu entnehmen, dass sich zwei nach oben gerichtete Ströme an den Stellen  $x = 0,6$  und  $x = 1,6$  geformt haben. Insgesamt sind vier Rayleigh-Bénard-Zellen zu sehen.

Entsprechend sieht es in Abbildung 40 für  $Ra = 50\,000$  aus. Hierbei unterscheidet sich

die Form der Zellen leicht. So liegen die Isolinien in der Nähe der Drehachsen weiter auseinander, während sie an den horizontalen Ränder sich stärker verdichten.

In Tabelle 42 sind die  $x$ -Koordinaten der Drehachsen bzw. Zellmitten für die verschiedenen Fälle enthalten. Alle Drehachsen haben die  $y$ -Koordinate 0,5.

$Ra$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
1650	-	-	-	-
10 000	0,50	1,50	-	-
20 000	0,29	0,79	1,29	1,79
50 000	0,31	0,81	1,31	1,81

Abb. 42:  $x$ -Koordinaten der Drehzentren der Zellen für verschiedene  $Ra$ -Zahlen

Tabelle 43 enthält die vertikalen Maximalgeschwindigkeiten im stationären Zustand.

$Ra$	$v_{max}$ in $\text{m s}^{-1}$
1650	$8,052 \cdot 10^{-11}$
10 000	0,102
20 000	0,111
50 000	0,137

Abb. 43: Maximale vertikale Geschwindigkeiten  $v$  für verschiedene  $Ra$ -Zahlen

### 3.3.3 Diskussion

An den parallelen Isolinien in Abbildung 37 ist zu erkennen, dass im Fall  $Ra = 1650$  kein Konvektionsstrom vorliegt und der Wärmetransport ausschließlich über Diffusion bzw. Wärmeleitung erfolgt. Da die Rayleigh Zahl unter der kritischen Rayleigh-Zahl liegt, entspricht dieses Ergebnis den Erwartungen.

Zu Beginn gab es eine Störung des Systems, sodass sich ein temporärer Konvektionsstrom gebildet hat. Aufgrund der zu niedrigen Rayleigh-Zahl konnte dieser Strom nicht aufrecht erhalten werden, womit die maximale vertikale Geschwindigkeit  $v_{max}$  gegen 0 geht. Aufgrund von Rundungsfehlern wird sie jedoch nie genau 0 betragen, wie aus Tabelle 43 zu entnehmen ist.

Für die Rayleigh-Zahl 10 000 tritt Rayleigh-Bénard-Konvektion auf, da  $Ra > Ra_c$

( $Ra_c = 1707$ ). Der Vorgang wird im Abschnitt 3.2 untersucht.

In den Simulationen für  $Ra = 20\,000$  und  $Ra = 50\,000$  entstehen im Gegensatz zu  $Ra = 10\,000$  jeweils zwei nach oben gerichtete Konvektionsströme an den Stellen  $x_1 = 0,6$  und  $x_2 = 1,6$ . Es liegen vier Rayleigh-Bénard-Zellen vor. Dies lässt sich mithilfe von Abbildung 44 erklären.

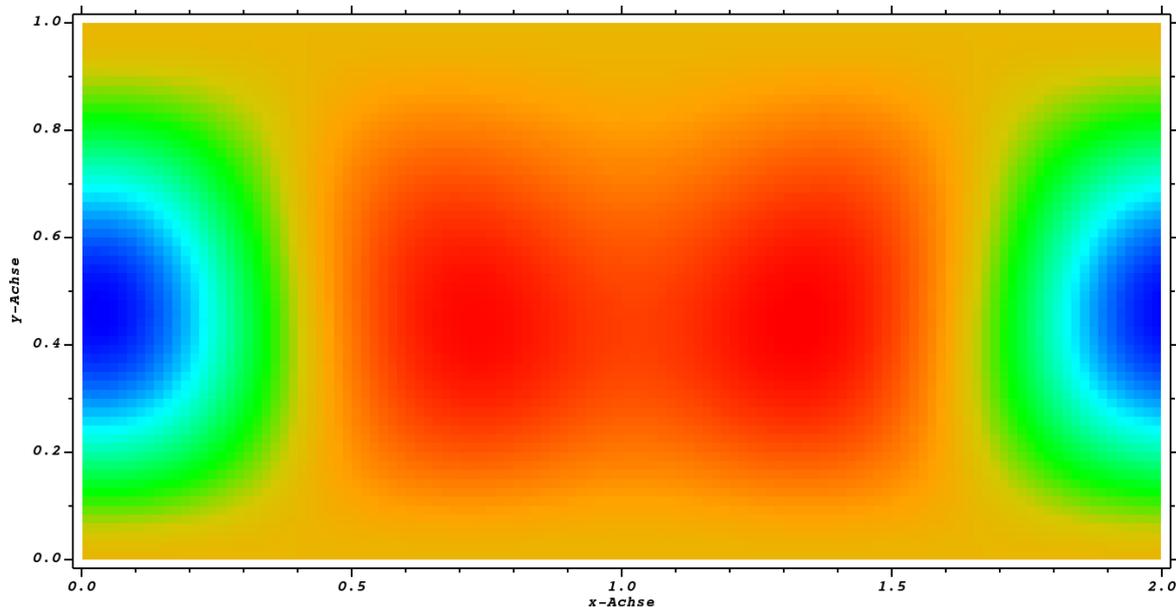


Abb. 44: Farbige Darstellung der vertikalen Geschwindigkeit  $v$  zum Zeitpunkt  $t = 50$  s für  $Ra = 10\,000$ . Dabei stehen rote Farbtöne für Strömungen in positiver  $y$ -Richtung, blaue Töne für Strömungen in negativer  $y$ -Richtung.

In der Darstellung sind im Bereich  $0,5 < x < 1,6$  zwei vertikale Ströme zu sehen. Diese sind auf die anfängliche Störung zurückzuführen. Bei ausreichend starker Konvektion wie bei den  $Ra$ -Zahlen  $20\,000$  und  $50\,000$  divergieren beiden Strömungen zu zwei separaten Konvektionsströmen. Ausgehend davon entstehen vier Rayleigh-Bénard-Zellen.

Wie bereits in der Beschreibung erwähnt, unterscheiden sich die Endzustände bei  $Ra = 20\,000$  und  $Ra = 50\,000$  leicht. Die stärkeren Verdichtungen bzw. Verdünnungen der Isolinien bei der Rayleigh-Zahl  $50\,000$  sind durch die stärkere Konvektion zu erklären. Aus Tabelle 43 geht hervor, dass die maximale vertikale Geschwindigkeit  $v_{max}$  im Fall von  $Ra = 50\,000$  am größten ist. Da die Geschwindigkeit überall im Konvektionsstrom der Zelle nahezu gleich ist, liegt bei  $Ra = 50\,000$  insgesamt ein stärkerer Konvektionsfluss vor.

Ferner ist in den Darstellungen mit Konturlinien 39 und 40 zu sehen, dass der Hochpunkt der sechsten Isolinie von unten ausgehend im Fall  $Ra = 50\,000$  höher liegt. Daraus schließt sich ebenfalls, dass ein stärkerer vertikaler Konvektionsstrom vorliegt.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass Rayleigh-Bénard-Zellen nur entstehen können,

wenn die Rayleigh-Zahl größer als die kritische Rayleigh-Zahl von 1707 ist. Ferner führen höhere Rayleigh-Zahlen zu stärkerer Konvektion.

## 4 Fazit und Ausblick

Die Simulationen haben gezeigt, dass bei Rayleigh-Zahlen größer als die kritische Rayleigh-Zahl Rayleigh-Bénard-Zellen entstehen. Dabei bilden sich die Zellen nacheinander, bis die Abfolge von sich abwechselnd im bzw. gegen den Uhrzeigersinn drehenden Rayleigh-Bénard-Zellen die gesamte horizontale Länge des Simulationsfeldes ausfüllt. Hierbei tritt bei höheren Rayleigh-Zahlen stärkere Konvektion auf.

Aus der Validierung geht hervor, dass die Simulationsergebnisse weitestgehend mit der Theorie und den Ergebnissen aus anderen Publikationen übereinstimmen.

Die dabei auftretenden Ungenauigkeiten sind zum Teil auf die Vereinfachungen zugunsten der Rechenzeit zurückzuführen. Darunter fallen die räumliche Diskretisierung  $\Delta x$  und die zeitliche Diskretisierung  $\Delta t$ . Hierbei führen kleine Werte von  $\Delta x$  und  $\Delta t$  zwar zu besseren Simulationsergebnissen, aber auch zu längerer Rechenzeit.

Des Weiteren sorgen Rundungsfehler für Ungenauigkeiten bei den Ergebnissen.

Die Simulation wurde auf 2D beschränkt, um Rechenzeit einzusparen.

In dieser Arbeit wurde die Rayleigh-Bénard-Konvektion ausführlich untersucht. Nichtsdestotrotz gibt es noch offene Fragestellungen, an denen weiter geforscht werden kann.

Es wurden nur relativ kleine Rayleigh-Zahlen verwendet. Interessant wäre zu untersuchen, wie die Simulationsergebnisse für sehr große Rayleigh-Zahlen der Größenordnungen  $10^5$  und  $10^6$  aussehen.

Darüber hinaus gibt es noch offene Fragen bei der Analyse der Geschwindigkeitsfelder im Abschnitt 3.2.4. Hierbei sind die Ursachen für die teilweise linearen Verläufe der Graphen nicht vollständig geklärt.

Zusammenfassend ist die gewählte Simulationsmethode in der Lage, Rayleigh-Bénard-Konvektion zu simulieren und zu beschreiben. Somit dient sie als solide Grundlage, viele der auftretenden Phänomene zu erklären.

## 5 Danksagung

Wir bedanken uns herzlich bei allen, die uns dieses Projekt ermöglicht haben.

In erster Linie zählen dazu M. Sc. Marcel Weichel und Dr. Martin Reder, die uns während des Projekts betreut haben und stets Antworten auf unsere Fragen hatten. Für ihr Engagement und ihre Hilfsbereitschaft bedanken wir uns herzlich.

Darüber hinaus danken wir Dr. Hans-Werner und Josephine Hector dafür, dass sie das Hector-Seminar gestiftet und uns dadurch über die Jahre vielfältige Einblicke in das wissenschaftliche Arbeiten ermöglicht haben.

Zu guter Letzt gilt unser Dank allen Kursleiterinnen und Kursleitern, die uns über die Jahre im Hector-Seminar begleitet und unterstützt haben und uns eine interessante Zeit im Hector-Seminar möglich machten.

Besonders hervorheben möchten wir dabei Thomas Knecht, der nicht nur den Kurs KA18 geleitet, sondern auch uns für die Dauer dieses Projekts betreut hat.

## 6 Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichern wir, dass diese Arbeit unter Beratung durch Herrn Dr. Martin Reder, Herrn M.Sc. Marcel Weichel und unserem Kursleiter Herrn Thomas Knecht selbstständig verfasst wurde und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet wurden.

---

Paul Dyck

---

Lorenz Mutschler

## Literatur

- [1] David P. Chock. A comparison of numerical methods for solving the advection equation—iii. *Atmospheric Environment*, 25:853–871, 1990.
- [2] Charles A. Doswell III. The Operational Meteorology of Convective Weather. *NOAA Technical Memorandum NWS NSSF-5*, 1:1–102, 1982.
- [3] KIT. Das PACE3D-Softwarepaket, 2023.
- [4] Pirooz Mohazzab. Archimedes’ Principle Revisited. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 5:836–843, 2017.
- [5] Octave. GNU Octave, 2024.
- [6] M. Dubois and P. Bergé. Rayleigh-Bénard Convection. *Contemporary Physics*, 25:535–582, 1984.
- [7] M. Schwarzschild. Convection in Stars. *Astrophysical Journal*, 134:1, 1961.
- [8] Shan. Simulation of Rayleigh-Bénard Convection using a lattice Boltzmann method. *Physical Review E*, 55:2780–2787, 1997.
- [9] P. Szymczak and A. J. C. Ladd. Boundary conditions for stochastic solutions of the convection-diffusion equation. *Physical Review E*, 68, 2003.
- [10] Ali Turan, Thamasha Samarasinghe, and Chamil Abeykoon. Modelling of heat transfer and fluid flow in the hot section of gas turbines used in power generation: A comprehensive survey. *International Journal of Energy Research*, 2018.
- [11] Campbell Turner. Convection and mixing in magma chambers. *Earth-Science Reviews*, 23:255–352, 1986.
- [12] A. A. Zelenko and Yu. D. Resnyansky. Deep convection in the ocean general circulation model: Variability on the diurnal, seasonal, and interannual time scales. *Marine Physics*, 47:191–204, 2007.
- [13] Visit. Visit, 2024.
- [14] P. Kun Xu and Shiu Hong Lui. Simulating oscillatory flows in Rayleigh-Bénard convection using the lattice Boltzmann method. *Physical Review E*, 60:464–470, 1999.