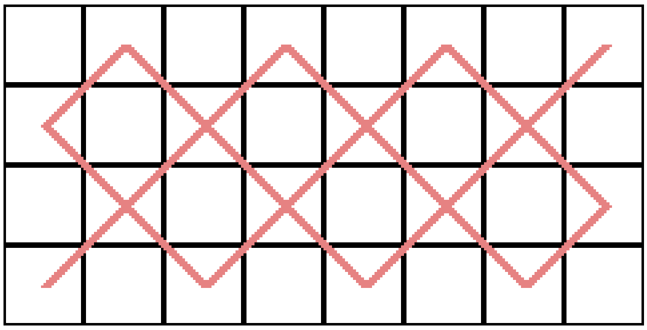
Billardbahnen



Abschlussbericht der Kooperationsphase 2023/24

Durchgeführt am KIT
Betreut durch Prof. Dr. Frank Herrlich und Dr. Peter Kaiser

Artur Radestock und Sebastian Störzbach, Kurs KA 18

Inhaltsverzeichnis

Abstract

The project Billiardbahnen studied the paths of billiard balls on a variable sized rectangle with the analogy of bishops on a variable sized chessboard. The billard balls are moving until they reach their starting position in their starting direction, by reflecting off the walls of the chessboard. The project answered multiple questions concerning the paths of these bishops including the amount of intersections of a path with itself, the length of a path and the amount of different paths on a specified board.

1 Problemstellung

Wir betrachten eine rechteckige Fläche mit beliebigen Seitenlängen $n, m \in \mathbb{N}$, wobei $n > 1$ und $m > 1$ gilt. Diese Fläche unterteilen wir in quadratische Felder mit einer Seitenlänge von 1. Solch eine Fläche nennen wir Schachbrett. Ein Schachbrett mit den Seitenlängen $n = 8$ und $m = 4$ sieht wie folgt aus:

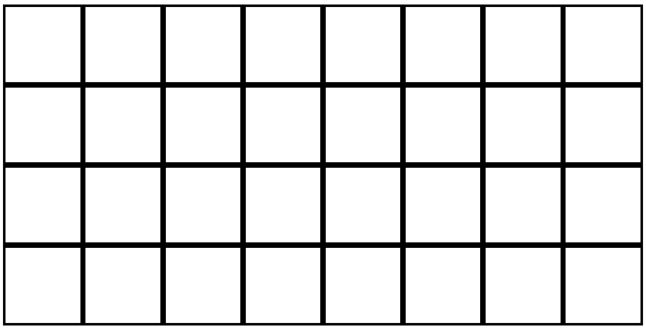


Abbildung 1: Schachbrett mit den Seitenlängen $n = 8$ und $m = 4$

In solch einem Schachbrett bezeichnen wir Felder, welche maximal 3 angrenzende Felder besitzen, als Randfeld oder Rand, und Felder, welche nur 2 angrenzende Felder besitzen als Eckfeld oder Ecke. Dieses Schachbrett legen wir nun in ein Koordinatensystem, wobei der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken unteren Feldes liegt. So hat jedes Feld die Koordinaten seines Mittelpunkts. Beispielsweise hat das rechte obere Eckfeld in Abbildung 1 die Koordinaten $(7, 3)$.
Wir wählen nun ein beliebiges Feld des Schachbretts, dieses Feld nennen wir Startfeld. Dort steht ein Läufer, der sich im Folgenden diagonal nach rechts oben bewegt, bis er den Rand des Schachbretts erreicht. In der folgenden Abbildung ist der bisherige Weg eines Läufers eingezeichnet, welcher in der linken unteren Ecke startet:

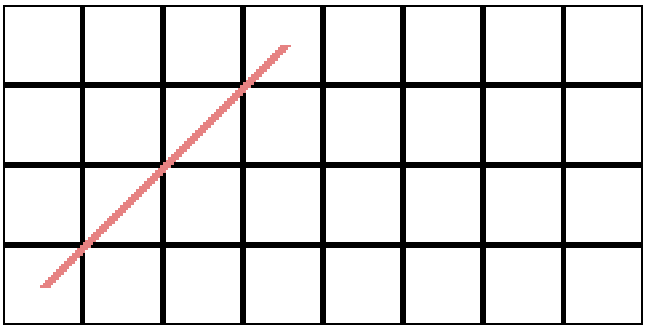


Abbildung 2: Schachbrett mit dem Beginn des Weges eines Läufers

Wenn der Läufer den Rand erreicht hat, soll er daran abprallen. Dieses Abprallen nennen wir Randberührung. Wenn der Läufer auf eine Ecke trifft, ändert er seine Bewegungsrichtung direkt um 180°, dies zählen wir im Folgenden als zwei Randberührungen. Mit der Bewegungsrichtung des Läufers in einem bestimmten Feld, ist die Richtung gemeint, in welche der Läufer aus dem Feld austritt. Auf solch eine Weise bewegt sich der Läufer nun weiter, bis er sein Startfeld erreicht, während er sich wieder in der gleichen Bewegungsrichtung wie zu Anfang befindet. Den kompletten zurückgelegten Weg des Läufers nennen wir Bahn, wobei das Startfeld des Läufers dem Startfeld der Bahn entspricht. In der folgenden Abbildung sieht man die vollständige Bahn des zuvor beschriebenen

Läufers. Die Bahn beginnt in der unteren linken Ecke, in der oberen rechten Ecke findet eine Kehrtwende statt, woraufhin die Bahn in der unteren linken Ecke wieder endet:

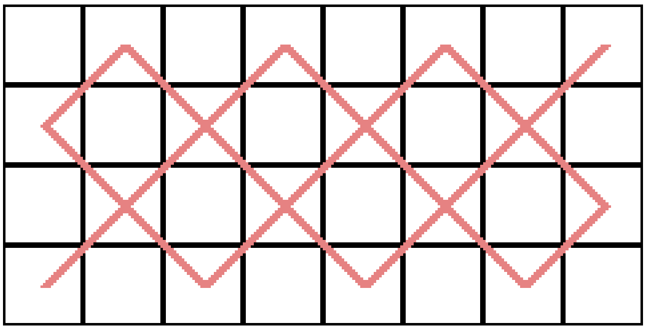


Abbildung 3: Schachbrett mit der vollständigen Bahn

Die folgende Abbildung zeigt ein weiteres Beispiel einer Bahn, wobei hier die Seitenlängen des Schachbretts $n = 7$ und $m = 4$ betragen. Außerdem startet der Läufer auf dem Feld $(1, 2)$, welches hier grün markiert ist.

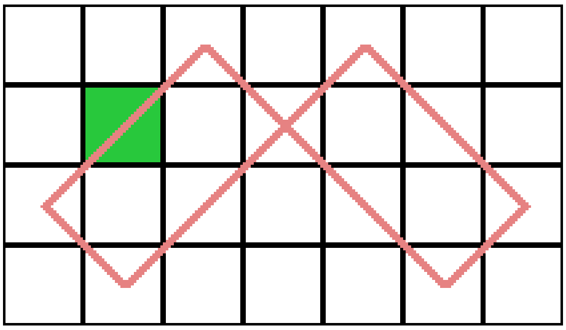


Abbildung 4: Schachbrett mit $n = 7$ und $m = 4$ mit einer Bahn mit Startfeld $(1, 2)$

Nun sollen die folgenden fünf Fragestellungen für beliebige Schachbretter und Bahnen beantwortet werden:

1. Wie lang ist die Bahn?
2. Wie oft berührt die Bahn den Rand?
3. Wie oft überschneidet sich die Bahn?
4. Wie viele Felder werden von der Bahn i-mal durchquert für $0 \leq i \leq 4$?
5. Wie viele unterschiedliche Bahnen existieren auf dem Schachbrett?

2 Modulofeld

Da eine Bahn auf dem Schachbrett durch ein Feld in bis zu vier unterschiedliche Richtungen gehen kann, ist das Schachbrett für die mathematische Beschreibung der Bahn ungeeignet. Daher führen wir das Modulofeld ein. Jedes Schachbrett mit den Seitenlängen n und m hat dabei ein äquivalentes Modulofeld mit den Seitenlängen $2(n - 1)$ und $2(m - 1)$. Dabei besitzt das Modulofeld ein eigenes Feld für jede der maximal vier Bewegungsrichtungen für jedes Feld im dazugehörigen Schachbrett. Diese sind dabei so angeordnet, dass der Läufer im Modulofeld nicht an der Stelle abprallt, wo im

Schachbrett der Rand ist, sondern in die gleiche Richtung weiter läuft. In den folgenden Abbildungen sieht man die ersten 5 Schritte eines Läufers mit dem Startfeld $(0, 0)$ auf einem Schachbrett mit den Seitenlängen $n = 8$ und $m = 4$ im Schachbrett und im Modulofeld:

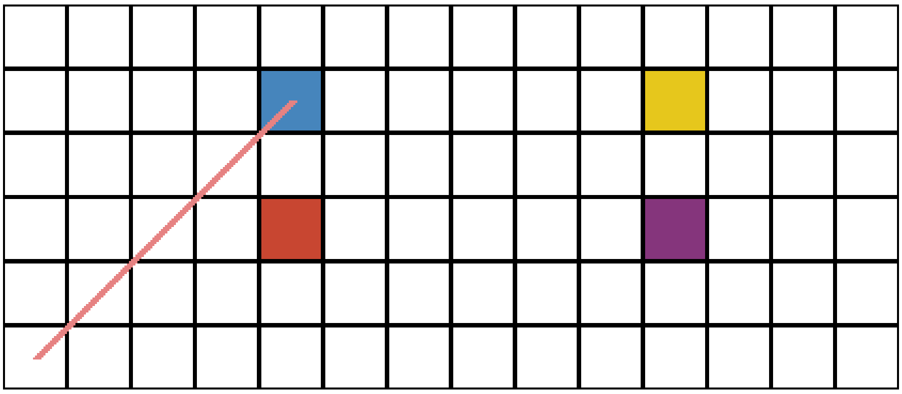


Abbildung 5: Die ersten 5 Schritte des Läufers im Modulofeld abgebildet

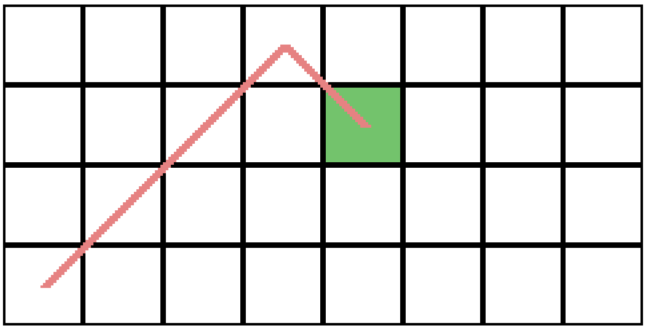


Abbildung 6: Die ersten 5 Schritte des Läufers im Schachbrett abgebildet

Hierbei ist das grün markierte Feld im Schachbrett identisch zu den 4 im Modulofeld markierten Feldern, wobei das Durchlaufen eines der im Modulofeld markierten Felder identisch zu dem Durchlaufen des grünen Felds im Schachbrett in eine bestimmte Richtung ist. Wenn die Bahn im Modulofeld nach einer bestimmten Anzahl Schritten das rote Feld durchläuft, durchläuft sie im Schachbrett nach der selben Anzahl an Schritten das grüne Feld in Richtung rechts oben. Genauso verhält es sich mit dem Durchlaufen des blauen Feldes, wobei dies gleichbedeutend ist mit dem Durchlaufen des grünen Feldes nach rechts unten. Das Durchlaufen des violetten Feldes ist gleichbedeutend mit dem Durchlaufen des grünen Feldes nach links oben und das Durchlaufen des gelben Feldes ist gleichbedeutend mit dem Durchlaufen des grünen Feldes nach links unten. In den folgenden Abbildungen sind die ersten sieben Schritte des Läufers im Schachbrett und im Modulofeld abgebildet, wobei hier gleiche Felder im Schachbrett und im Modulofeld in gleicher Farbe markiert wurden:

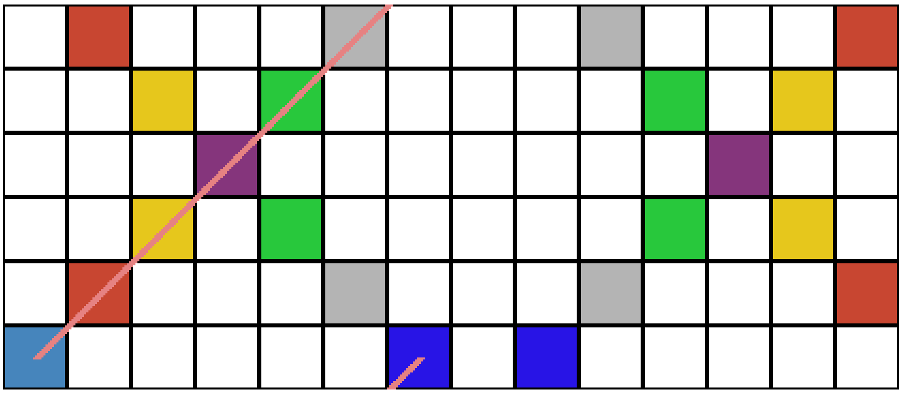


Abbildung 7: Die ersten 7 Schritte des Läufers im Modulofeld abgebildet

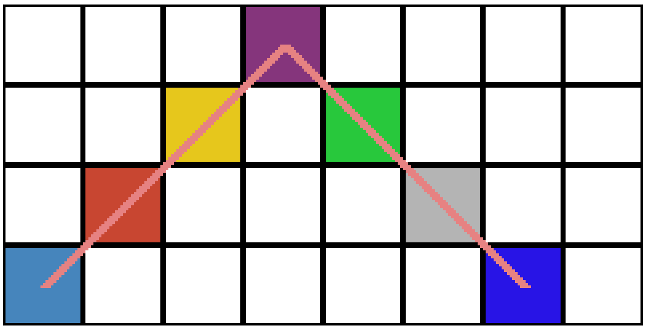


Abbildung 8: Die ersten 7 Schritte des Läufers im Schachbrett abgebildet

Hierbei ist zu erkennen, dass die Randfelder, hier dunkelblau und violett markiert, nur zwei mal im Modulofeld auftauchen, da man durch diese Felder nur in zwei Richtungen gehen kann. Das violette Feld zum Beispiel kann nur in Richtung rechts unten oder in Richtung links unten durchlaufen werden. Das hellblau markierte Eckfeld taucht im Modulofeld nur einmal auf, da man durch dieses nur in Richtung rechts oben laufen kann. Bei der angegebenen Anordnung der Felder im Modulofeld ist zu erkennen, dass die Bahn des Läufers eine gerade Linie bildet, welche am oberen Rand des Modulofeldes aufhört und am gegenüberliegenden Rand fortgeführt wird. In der folgenden Abbildung ist die komplette Bahn des Läufers im Modulofeld abgebildet. Übergänge am Rand sind durch gleiche Zahlen gekennzeichnet:

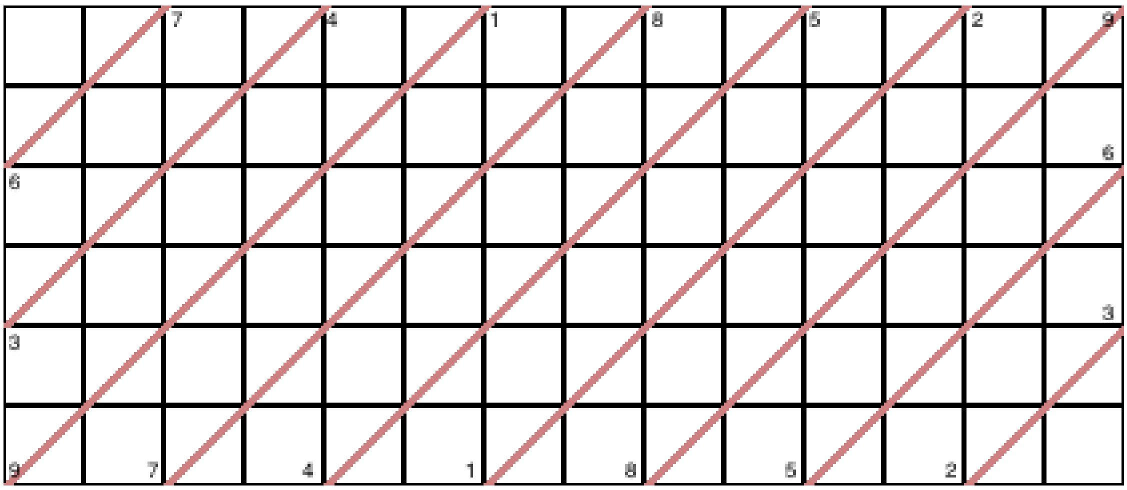


Abbildung 9: Die gesamte Bahn des Läufers im Modulofeld

Koordinaten im Modulofeld verhalten sich ähnlich zu Koordinaten im Schachbrett, mit dem Unterschied, dass auch negative Koordinaten verwendet werden können. So entspricht im obigen Feld die x-Koordinate -1 der Koordinate 13.
Da die Bahn im Modulofeld eine gerade Linie bildet, welche an den Rändern des Modulofeldes zur anderen Seite springt, kann die Position (x, y) dieses Läufers im Modulofeld in Abhängigkeit zur Anzahl an vollführten Schritten k mit den folgenden Gleichungen berechnet werden:

$$x \equiv k \mod 2(n-1)$$
$$y \equiv k \mod 2(m-1)$$

Dies bedeutet auch für jede beliebige Position (x, y), dass falls es ein k gibt, für welches diese Gleichungen gelten, die Position (x, y) nach diesen k Schritten von der Bahn erreicht wird und damit auf der Bahn liegt. In der folgenden Abbildung ist eine neue Bahn in dem selben Modulofeld abgebildet, welche den Startpunkt $(0, 1)$ hat:

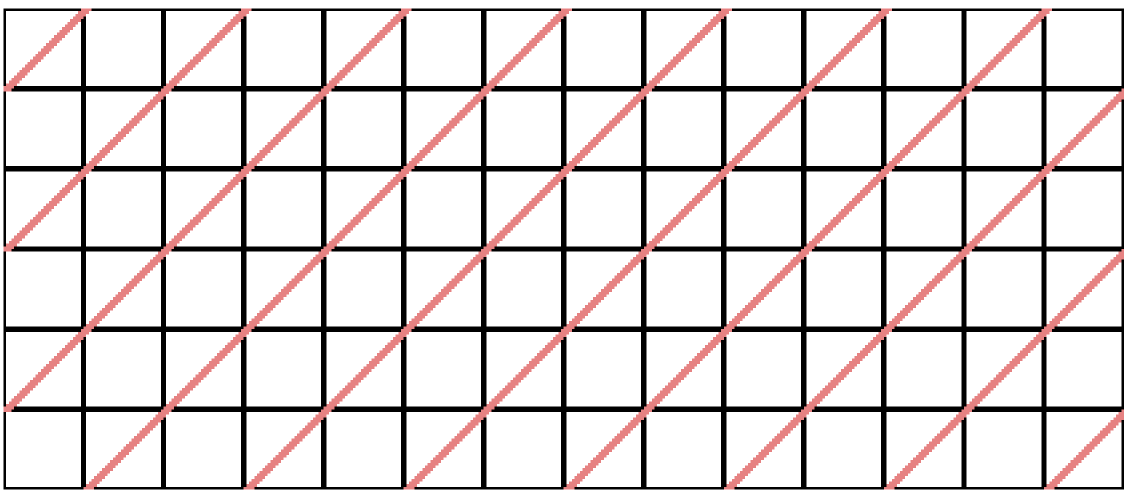


Abbildung 10: Die Bahn mit Startpunkt $(0, 1)$ im Modulofeld abgebildet

Durch das Verschieben der Bahn im Modulofeld, wird jeder einzelne Punkt auf der Bahn um den selben Vektor verschoben, weshalb man diesen bei den Gleichungen wieder abziehen muss. Somit sind die vollständigen Gleichungen für Punkte (x, y) auf einer Bahn mit dem Startfeld (a, b) die folgenden:

$$k \equiv x - a \mod 2(n-1) \tag{2.1}$$

$$k \equiv y - b \mod 2(m-1) \tag{2.2}$$

Diese Gleichungen sind nun genau dann erfüllt, wenn der Punkt (x, y) auf der Bahn liegt. Um nun überprüfen zu können, wann dieses Gleichungssystem tatsächlich lösbar ist, haben wir uns mit dem Chinesischen Restsatz beschäftigt.

2.1 Der Chinesische Restsatz

Satz 2.1. *Es seien $x, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$, weiter seien $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$. Weiter sei $g = \mathrm{ggT}(m_1, m_2)$. Nun hat das Gleichungssystem:*

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \mod m_1 \\ x &\equiv a_2 \mod m_2 \end{aligned}$$

genau dann eine Lösung, wenn:

$$a_1 \equiv a_2 \mod g$$

Beweis. Nach dem Lemma von Bézout können wir g als $g = a_1vm_2 + a_2um_1$ mit $u, v \in \mathbb{Z}$ schreiben. Wir können uns nun eine Lösung konstruieren:

$$x = \frac{a_1vm_2 + a_2um_1}{g}$$

Dies ist auch tatsächlich eine Lösung, denn:

$$x \equiv \frac{a_1vm_2 + a_2um_1}{g} \mod m_1$$

Wir können vm_2 durch $g - um_1$ ersetzen:

$$\begin{aligned} x &\equiv \frac{a_1(g - um_1) + a_2um_1}{g} \mod m_1 \\ x &\equiv \frac{a_1g - a_1um_1 + a_2um_1}{g} \mod m_1 \\ x &\equiv a_1 + \frac{(a_2 - a_1)um_1}{g} \mod m_1 \end{aligned}$$

Aus unserer Bedingung folgt nun, dass $(a_2 - a_1)$ durch g teilbar ist, weshalb der Bruch ein vielfaches von m_1 ist und unsere Lösung die Bedingung $x \equiv a_1 \mod m_1$ erfüllt. Dies lässt sich analog für die andere Gleichung in unserem System durchführen.
Wir müssen nun zeigen, dass $a_1 \not\equiv a_2 \mod g$ alle Lösungen ausschließt. Da g ein Teiler von m_1 ist, gilt:

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \mod m_1 \\ x &\equiv a_1 \mod g \end{aligned}$$

Analog gilt

$$x \equiv a_2 \mod g$$

Folglich gilt:

$$a_1 \equiv a_2 \mod g$$

wodurch gezeigt ist, dass dies tatsächlich der einzige Fall ist, in dem eine Lösung existiert. □

Für unser genanntes Gleichungssystem gibt es also genau dann eine Lösung, wenn:

$$x - a \equiv y - b \mod \mathrm{ggT}(2(n-1), 2(m-1))$$

Dies ist eine eindeutige Bedingung für unsere Bahn, weshalb wir diese nun mathematisch definieren können.

2.2 Bahndefinition

Definition 2.2. *Eine Bahn B mit Startpunkt $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ sei wie folgt definiert:*

$$B(a, b) := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - x_2 \equiv a - b \mod ggT(2(n-1), 2(m-1))\} \tag{2.3}$$

Definition 2.3. *Es sei $M(n, m)$ die Menge aller Bahnen im Modulofeld des zugehörigen Schachbrettes mit den Seitenlängen n und m:*

$$M(n, m) := \{B(a, b) \mid a \in \mathbb{Z} \text{ und } b \in \mathbb{Z}\}$$

Satz 2.4. *Die Länge jeder Bahn in $M(n, m)$ ist $kgV(2(n-1), 2(m-1))$.*

Beweis. Die Bahn endet, sobald das Startfeld in der ursprünglichen Startrichtung erreicht wurde. Da die Richtungen im Modulofeld getrennt wurden, entspricht dies dem erneuten erreichen des Startfelds im Modulofeld. Aus Gleichung (2.1) und Gleichung (2.2) folgt, dass sich die x-Koordinate alle $2(n-1)$ Schritte und die y-Koordinate alle $2(m-1)$ Schritte wiederholt. Damit beide Koordinaten gleich sind brauchen wir logischerweise $kgV(2(n-1), 2(m-1))$ Schritte. □

Satz 2.5. *Die Anzahl an Randberührungen jeder Bahn in $M(n, m)$ ist $\frac{L}{n-1} + \frac{L}{m-1}$ mit $L = kgV(2(n-1), 2(m-1))$.*

Beweis. Aus dem Verlauf der Bahn ergibt sich, dass alle $n-1$ Schritte die Bahn an dem rechten oder linken Rand des Feldes abprallt. Genauso prallt die Bahn alle $m-1$ Schritte an dem oberen oder unteren Rand ab. Daher ist die Anzahl an Randberührungen die Bahnlänge durch $n-1$ + die Bahnlänge durch $m-1$, wodurch sich die Formel $\frac{L}{n-1} + \frac{L}{m-1}$ für $L = kgV(2(n-1), 2(m-1))$ ergibt. □

Satz 2.6. *Das Feld (x_1, x_2) mit $0 < x_1 < n-1$ und $0 < x_2 < m-1$ des Schachbrettes wird durch die Punkte (x_1, x_2), $(-x_1, x_2)$, $(x_1, -x_2)$ und $(-x_1, -x_2)$ des Modulofeldes beschrieben, wobei die Richtung mit der die Bahn des Schachbrettes dieses durchläuft, in dieser Reihenfolge den Richtungen oben-rechts, oben-links, unten-rechts, unten-links entspricht.*

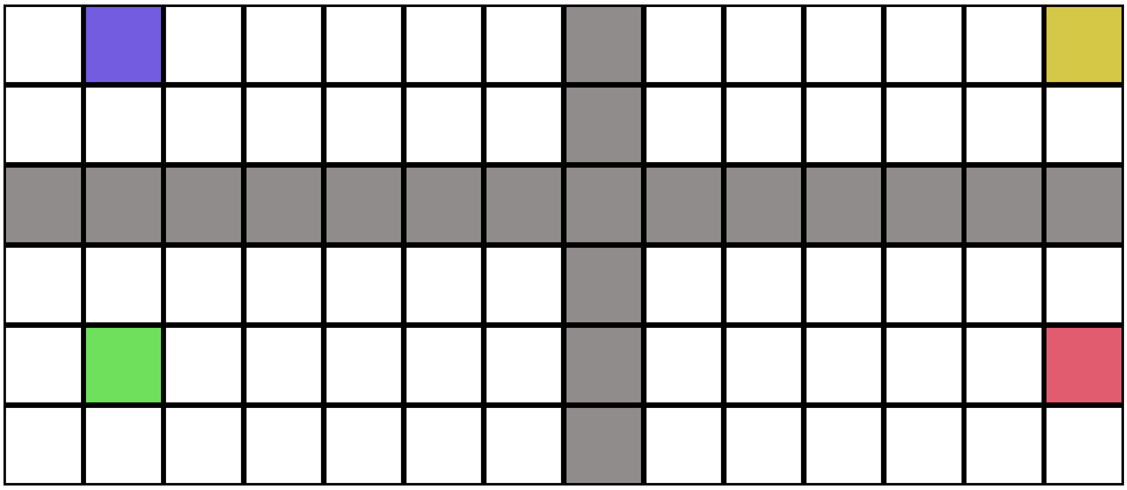


Abbildung 11: Modulofeld mit den Punkten $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$

Beweis. In Abbildung 11 ist ein Modulofeld zu sehen, in dem die Randfelder des zugehörigen Schachbretts grau und die vier Punkte die die genannten Bedingungen erfüllen farbig gefärbt sind.
Aus der Herleitung des Modulofeldes folgt, dass das grüne Feld dem Laufen nach obenrechts entspricht. Da der Läufer nach Erreichen des grauen Randes im Schachbrett die Richtung ändert, muss sich der Läufer oberhalb des horizontalen grauen Randes nach unten bewegen. Analog ergeben sich auch die anderen Bewegungsrichtungen der Felder.

Man muss nun zeigen, dass sich alle vier Punkte auch tatsächlich auf dasselbe Feld im Schachbrett beziehen. Hierzu betrachten wir zunächst nur die x-Koordinate. Wenn wir nun die Koordinaten im Modulofeld, mit denen im Schachbrett vergleichen, sehen wir, dass beide bis 7 identisch sind. Ab 8 werden die Koordinaten des Schachbretts wieder kleiner, bis die Koordinaten bei 0 wieder identisch sind. Die Koordinate $-x_1$ des Modulofelds braucht nun genau x_1 Schritte, bis der Läufer bei 0 ankommt. Da dies dieselbe Anzahl an Schritten ist, die der Läufer auf dem Schachbrett auf Feld x_1 braucht, wenn er nach unten läuft, müssen die beiden Felder identisch sein. Dies lässt sich analog für die y-Koordinate zeigen, womit die genannten Punkte sich auch tatsächlich auf dasselbe Feld des Schachbretts beziehen.

Es ist zu bemerken, dass bei $x_1 = 0$ und $x_1 = n-1$ die Punkte (x_1, x_2) und $(-x_1, x_2)$ sowie $(x_1, -x_2)$ und $(-x_1, -x_2)$ die jeweils gleichen Punkte des Modulofeldes beschreiben, da dies Randfelder sind. Diese werden wie man im Schachbrett beobachten kann, sowohl nach oben, als auch nach unten durchlaufen.

□

Lemma 2.7. *Es seien $B(a_1, a_2), B(b_1, b_2) \in M(n, m)$ mit $a_1 - a_2 \equiv b_1 - b_2 \mod ggT(2(n-1), 2(m-1))$. Dann gilt $B(a_1, a_2) = B(b_1, b_2)$.*

Beweis. Für jeden Punkt $(x, y) \in B(a_1, a_2)$ gilt:

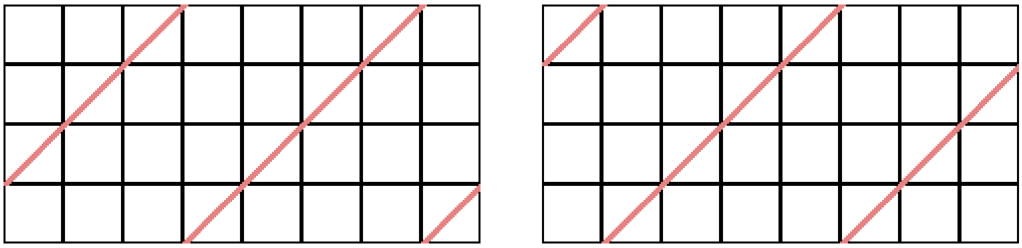
$$a_1 - a_2 \equiv x - y \mod ggT(2(n-1), 2(m-1))$$

Da $a_1 - a_2 \equiv b_1 - b_2 \mod ggT(2(n-1), 2(m-1))$ kann man $a_1 - a_2$ durch $b_1 - b_2$ ersetzen:

$$b_1 - b_2 \equiv x - y \mod \mathrm{ggT}(2(n-1), 2(m-1))$$

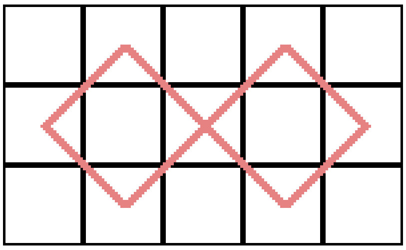
Dies ist die Bedingung für jeden Punkt, welcher auf $B(b_1, b_2)$ liegt. Da die beiden Bedingungen gleich sind, beschreiben $B(a_1, a_2)$ und $B(b_1, b_2)$ die gleiche Punktmenge. Daher sind sie gleich. $\square$

Wir betrachten nun zwei Bahnen im Modulofeld:



(a) (b)

Diese Bahnen sind im Modulofeld eindeutig unterschiedlich, im Schachbrett sieht die Darstellung beider Bahnen allerdings gleich aus:



Da sich unsere Fragestellung auf die Anzahl an Bahnen im Schachbrett bezieht, brauchen wir einen Weg, die beiden Bahnen im Modulofeld zu unterscheiden. Hierfür führen wir den Begriff überlappend ein.

Definition 2.8. *Es seien zwei Bahnen $B_1, B_2 \in M(n, m)$ überlappend, wenn sie durch die gleichen Felder im Schachfeld in die jeweils gleiche oder in die entgegengesetzte Richtung gehen.*

Lemma 2.9. *Zwei Bahnen $B(a_1, a_2), B(b_1, b_2) \in M(n, m)$ sind genau dann überlappend, wenn $B(a_1, a_2) = B(b_1, b_2)$ oder $a_1 - a_2 \equiv -(b_1 - b_2) \mod ggT(2(n-1), 2(m-1))$.*

Beweis. Es sind zwei Fälle mit je zwei Beweisrichtungen zu unterscheiden:

1. Zwei Bahnen verlaufen genau dann durch die gleichen Felder in die gleiche Richtung im Schachbrett, wenn $B(a_1, a_2) = B(b_1, b_2)$:

   a) Man nehme an, dass $B(a_1, a_2)$ und $B(b_1, b_2)$ durch die gleichen Felder in die gleiche Richtung im Schachbrett verlaufen:

      Damit die Bahnen $B(a_1, a_2)$ und $B(b_1, b_2)$ durch gleiche Punkte in die gleiche Richtung gehen, müssen die Bahnen gleich sein, weshalb gilt $B(a_1, a_2) = B(b_1, b_2)$.

   b) Andererseits sei $B(a_1, a_2) = B(b_1, b_2)$:

      Da die Bahnen im Modulofeld identisch sind, beschreiben sie auch identische Bahnen auf dem Schachbrett, welche logischerweise durch die gleichen Felder in die gleiche Richtung laufen.

2. Zwei Bahnen verlaufen genau dann durch die gleichen Felder in entgegengesetzte Richtung im Schachbrett, wenn $a_1 - a_2 \equiv -(b_1 - b_2) \mod ggT(2(n-1), 2(m-1))$:

   a) Man nehme an, dass $B(a_1, a_2)$ und $B(b_1, b_2)$ durch die gleichen Felder in unterschiedliche Richtungen im Schachbrett verlaufen:

   Nach Satz 2.6 gilt für jeden Punkt $(x_1, x_2) \in B(a_1, a_2)$, dass $(-x_1, -x_2) \in B(b_1, b_2)$. Wir können nun die Gleichungen der beiden Bahnen aufstellen und erhalten:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\equiv a_1 - a_2 \mod \mathrm{ggT}(2(n-1), 2(m-1)) \\ -x_1 + x_2 &\equiv b_1 - b_2 \mod \mathrm{ggT}(2(n-1), 2(m-1)) \end{aligned}$$

   Durch Gleichsetzen erhalten wir schließlich:

$$a_1 - a_2 \equiv -(b_1 - b_2) \mod \mathrm{ggT}(2(n-1), 2(m-1))$$

   4. Andersherum nehme man an, dass $a_1 - a_2 \equiv -(b_1 - b_2) \mod \mathrm{ggT}(2(n-1), 2(m-1))$:

   Es sei $(x_1, x_2) \in B(a_1, a_2)$. Durch Aufstellen der Gleichung für $B(a_1, a_2)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 \equiv a_1 - a_2 &\equiv -(b_1 - b_2) \mod \mathrm{ggT}(2(n-1), 2(m-1)) \\ -x_1 + x_2 &\equiv b_1 - b_2 \mod \mathrm{ggT}(2(n-1), 2(m-1)) \end{aligned}$$

   Somit ist $(-x_1, -x_2) \in B(b_1, b_2)$ und die beiden Bahnen verlaufen nach Satz 2.6 in entgegengesetzte Richtungen.

□

Im Folgenden beweisen wir, dass man als Startpunkt der Bahn jeden Punkt nehmen kann, welcher auf der jeweiligen Bahn liegt.

Lemma 2.10. *Es seien $B(a_1, a_2) \in M(n, m)$ und $(x_1, x_2) \in B(a_1, a_2)$. Dann gilt $B(a_1, a_2) = B(x_1, x_2)$.*

Beweis. Da $(x_1, x_2) \in B(a_1, a_2)$:

$$x_1 - x_2 \equiv a_1 - a_2 \mod ggT(2(n-1), 2(m-1))$$

Nach Lemma 2.7 gilt $B(a_1, a_2) = B(x_1, x_2)$. □

Lemma 2.11. *Es seien $B_1 \in M(n, m)$ und $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in B_1$, dann gilt:*

$$x_1 - x_2 \equiv y_1 - y_2 \mod ggT(2(n-1), 2(m-1))$$

Beweis. Nach Lemma 2.10 gilt $B_1 = B(x_1, x_2)$. Nach der Definition der Bahn gilt für jeden Punkt $a \in B(x_1, x_2)$:

$$a_1 - a_2 \equiv x_1 - x_2 \mod ggT(2(n-1), 2(m-1))$$

Da $y \in B(x_1, x_2)$ gilt somit:

$$y_1 - y_2 = x_1 - x_2 \mod ggT(2(n-1), 2(m-1))$$

□

Im folgenden beweisen wir, dass alle Bahnen gleich sind, welche mindestens einen Punkt auf dem Modulofeld gemeinsam haben.

Lemma 2.12. *Es seien $B_1, B_2 \in M(n,m)$, $(x_1,x_2) \in B_1$ und $(x_1,x_2) \in B_2$. Dann gilt $B_1 = B_2$.*

Beweis. Nach Lemma 2.10 gilt sowohl $B_1 = B(x_1,x_2)$, als auch $B_2 = B(x_1,x_2)$. Daher gilt $B_1 = B_2$. □

Im weiteren folgen einige Eigenschaften der Bahnen beim Verschieben mit Vektoren.

Lemma 2.13. *Es seien $B_1, B_2 \in M(n,m)$, $(x_1,x_2) \in B_1$ und $i = (i_1,i_2) \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor, sodass $(x_1,x_2)+i \in B_1$. Dann gilt für alle $(y_1,y_2) \in B_2$, dass $(y_1,y_2)+i \in B_2$.*

Beweis. Da $(x_1,x_2) \in B_1$ ist nach Lemma 2.10 $B_1 = B(x_1,x_2)$. Damit ein Punkt (c,d) auf $B(x_1,x_2)$ liegt, gilt:

$$c - d \equiv x_1 - x_2 \mod ggT(2(n-1), 2(m-1))$$

Da der verschobene Punkt auch auf B_1 liegt, gilt:

$$\begin{aligned}(x_1+i_1)-(x_2+i_2) &\equiv x_1 - x_2 \mod ggT(2(n-1),2(m-1))\\ i_1 - i_2 &\equiv 0 \mod \mathrm{ggT}(2(n-1),2(m-1))\\ i_1 &\equiv i_2 \mod \mathrm{ggT}(2(n-1),2(m-1))\end{aligned}$$

Nach Lemma 2.10 gilt, dass $B_2 = B(y_1,y_2)$. Da $i_1 \equiv i_2 \mod ggT(2(n-1),2(m-1))$ gilt:

$$(y_1+i_1)-(y_2+i_2) \equiv y_1 - y_2 \mod ggT(2(n-1),2(m-1))$$

Folglich gilt $(y_1,y_2)+i \in B(y_1,y_2) = B_2$ □

Lemma 2.14. *Es sei $(x_1,x_2) \in B(a_1,a_2)$ und $i = (i_1,i_1)$. Nun gilt $(x_1,x_2)+i \in B(a_1,a_2)$.*

Beweis. Für jeden Punkt $(y_1,y_2) \in B(a_1,a_2)$ gilt:

$$y_1 - y_2 \equiv a_1 - a_2 \mod \mathrm{ggT}(2(n-1),2(m-1))$$

Wenn wir nun $(x_1,x_2)+i$ einsetzen erhalten wir:

$$\begin{aligned}(x_1+i_1)-(x_2+i_1) &\equiv a_1 - a_2 \mod \mathrm{ggT}(2(n-1),2(m-1))\\ x_1 - x_2 &\equiv a_1 - a_2 \mod \mathrm{ggT}(2(n-1),2(m-1))\end{aligned}$$

Aus $(x_1,x_2) \in B(a_1,a_2)$, folgt $(x_1,x_2)+i \in B(a_1,a_2)$. □

Lemma 2.15. *Es sei $(x_1,x_2) \in B_1$ und $i = (i_1,i_2) \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor, sodass $(x_1,x_2)+i \in B_2$. Dann gilt für alle $(y_1,y_2) \in B_1$, dass $(y_1,y_2)+i \in B_2$.*

Beweis. Da sowohl (x_1,x_2) als auch (y_1,y_2) auf B_1 liegt, gilt nach Lemma 2.11:

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 &\equiv y_1 - y_2 \mod ggT(2(n-1),2(m-1))\\ x_1 + i_1 - x_2 - i_2 &\equiv y_1 + i_1 - y_2 - i_2 \mod \mathrm{ggT}(2(n-1),2(m-1))\end{aligned}$$

Folglich liegt $(y_1,y_2)+i$ auf $B(x_1+i_1, x_2+i_2)$. Da $(x_1+i_1,x_2+i_2) \in B_2$ gilt nach Lemma 2.10 $B(x_1+i_1,x_2+i_2) = B_2$, weshalb $(y_1,y_2)+i$ auf B_2 liegt. □

2.3 Metriken

Um nun weitere Aussagen über Bahnen treffen zu können müssen wir verschiedene Bahnen miteinander vergleichen. Hierfür benutzen wir eine Metrik.

Definition 2.16. *Sei $d_M : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folgendermaßen definiert:*

$$d_M((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \tag{2.4}$$

Definition 2.17. *Sei $d_B : M(n, m) \times M(n, m) \to \mathbb{R}$ folgendermaßen definiert:*

$$d_B(B_1, B_2) := min\{d_M(x, y) : x \in B_1, y \in B_2\} \tag{2.5}$$

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass sowohl d_M als auch d_B Metriken sind. Eine Metrik $d(a, b)$ auf einer Menge M hat vier Eigenschaften:

Für alle $a, b, c \in M$ gilt:

1. $d(a, b) \geq 0$
2. $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
3. $d(a, b) = d(b, a)$
4. $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$

Lemma 2.18. *d_M ist eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$.*

Beweis. 1. Für beliebige Punkte $x, y \in \mathbb{R}^2$ gilt $d_M(x, y) \geq 0$, da in der Funktion d_M zwei Beträge addiert werden, welche stets nicht negativ sind, weshalb die Summe ebenfalls nicht negativ sein muss.

2. Es sei $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, nun ist $d_M((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = |x_1 - x_1| + |x_2 - x_2| = |0| + |0| = 0$. Es sei $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ und $d_M((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 0$, dann gilt sowohl $x_1 - y_1 = 0$ als auch $x_2 - y_2 = 0$ und somit gilt $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$.

3. Es seien $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Nun gilt

$$d_M((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| = d_M((y_1, y_2), (x_1, x_2))$$

4. Es seien $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$. Es gilt nun:

$$d_M(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = |(x_1 - z_1) + (z_1 - y_1)| + |(x_2 - z_2) + (z_2 - y_2)|$$

Nach der Dreiecksungleichung für den Betrag gilt nun:

$$\begin{aligned} d_M(x, y) &= |(x_1 - z_1) + (z_1 - y_1)| + |(x_2 - z_2) + (z_2 - y_2)| \\ &\leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2| = d_M(x, z) + d_M(z, y) \end{aligned}$$

□

Lemma 2.19. *Es seien $x, y, i \in \mathbb{R}^2$ mit $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ und $i = (i_1, i_2)$. Es gilt $d_M(x, y) = d_M(x + i, y + i)$.*

Beweis.

$$\begin{aligned} d_M(x,y) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \\ = |(x_1 + i_1) - (y_1 + i_1)| + |(x_1 + i_2) - (y_2 + i_2)| &= d_M(x + i, y + i) \end{aligned}$$

□

Damit wurde bewiesen, dass man zwei beliebige Punkte um den selben Vektor verschieben kann, ohne ihren Abstand nach d_M zu ändern.

Lemma 2.20. *Für jeden Punkt $x = (x_1, x_2) \in B_1$ gibt es einen Punkt $y = (y_1, y_2) \in B_2$, sodass $d_M(x, y) = d_B(B_1, B_2)$*

Beweis. Seien $a = (a_1, a_2) \in B_1$ und $b = (b_1, b_2) \in B_2$ Punkte für die d_M das Minimum annimmt.

Es gibt einen Vektor $i = (i_1, i_2)$, für den gilt $(x_1, x_2)+(i_1, i_2) = (a_1, a_2)$. Nach Lemma 2.13 liegt $(y_1, y_2) = (b_1, b_2)+(i_1, i_2)$ auf B_2. Nach Lemma 2.19 ist $d_M(a, b) = d_M(a+i, b+i) = d_M(x, y)$. Da $d_M(a, b) = d_B(B_1, B_2)$ ist $d_M(x, y) = d_B(B_1, B_2)$. □

Lemma 2.21. *d_B ist eine Metrik auf $M(n, m)$.*

Beweis. 1. Für beliebige $B_1, B_2 \in M(n, m)$ gilt $d_B(B_1, B_2) \geq 0$, da für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ gilt $d_M(x, y) \geq 0$.

2. Seien $B_1, B_2 \in M(n, m)$ so gewählt, dass $d_B(B_1, B_2) = 0$, dann gibt es zwei Punkte $x \in B_1$ und $y \in B_2$, für die gilt $d_M(x, y) = 0$. Da d_M eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ ist, gilt $x = y$. Daher haben B_1 und B_2 den gemeinsamen Punkt x und müssen nach Lemma 2.12 gleich sein. Sei umgekehrt $B_1 = B_2$, dann beschreiben die beiden Bahnen die gleiche Punktemenge und haben deshalb einen gemeinsamen Punkt c, es gilt:

$$d_B(B_1, B_2) = min\{d_M(x, y) : x \in B_1, y \in B_2\} = d_M(c, c) = 0$$

3. Da d_M eine Metrik ist, gilt für $x, y \in \mathbb{R}^2$:

$$d_M(x, y) = d_M(y, x)$$

Folglich gilt auch

$$\begin{aligned} d_B(B_1, B_2) &= min\{d_M(x, y) : x \in B_1, y \in B_2\} \\ = min\{d_M(y, x) : x \in B_1, y \in B_2\} &= d_B(B_2, B_1) \end{aligned}$$

4. Es seien $B_1, B_2, B_3 \in M(n, m)$. Weiter seien $x \in B_1$ und $y \in B_2$ Punkte, für die $d_M(x, y)$ das Minimum annimmt. Nach Lemma 2.20 dürfen wir einen Punkt für die Berechnung von d_B frei wählen, weshalb es einen Punkt $z \in B_3$ gibt, für den $d_M(y, z)$ das Minimum annimmt. Da d_M eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ ist, folgt die Ungleichung:

$$d_M(x, z) \leq d_M(x, y) + d_M(y, z)$$

Aus der Definition von d_B geht außerdem hervor, dass

$$d_B(B_1, B_3) \leq d_M(x, z)$$

Folglich gilt:

$$d_B(B_1, B_3) \leq d_B(B_1, B_2) + d_B(B_2, B_3)$$

□

Lemma 2.22. *Für eine Bahn $B(a_1, a_2) \in M(n,m)$, gibt es maximal zwei unterschiedliche Bahnen $B(b_1, b_2), B(c_1, c_2) \in M(n,m)$ mit:*

$$d_B(B(a_1, a_2), B(b_1, b_2)) = d_B(B(a_1, a_2), B(c_1, c_2))$$

Beweis. Nach Lemma 2.20 können wir den Punkt von $B(a_1, a_2)$ in $d_B(B(a_1, a_2), B(b_1, b_2))$ frei wählen. Hierfür wählen wir $a = (a_1, a_2)$ und der zugehörige Punkt auf $B(b_1, b_2)$ sei $x = (x_1, x_2)$. Es gilt also:

$$\begin{aligned} d_B(B(a), B(b_1, b_2)) &= d_M(a, x) \\ d_M(a, x) &= |a_1 - x_1| + |a_2 - x_2| \end{aligned}$$

Um die Anzahl an Fällen zu reduzieren, verschieben wir den Punkt x nun so, dass einer der Beträge 0 ergibt und damit wegfällt.
Hierzu benutzen wir den Vektor $(a_2 - x_2, a_2 - x_2)$. Nach Lemma 2.14 gilt:

$$(x_1, x_2) + (a_2 - x_2, a_2 - x_2) = (x_1 + a_2 - x_2, a_2) \in B(b_1, b_2)$$

Nun ist:

$$d_M(a, (x_1 + a_2 - x_2, a_2)) = |(a_1 - x_1) + (-a_2 + x_2)|$$

Nach der Dreiecksungleichung für Beträge gilt:

$$\begin{aligned} |(a_1 - x_1) + (-a_2 + x_2)| \leq |a_1 - x_1| + |-a_2 + x_2| &= |a_1 - x_1| + |a_2 - x_2| \\ d_M(a, (x_1 + a_2 - x_2, a_2)) &\leq d_M(a, x) \end{aligned}$$

Da d_B stets dem minimalen Abstand d_M zweier Punkte der Bahnen entspricht, kann $d_M(a, (x_1 + a_2 - x_2, a_2))$ nie kleiner sein als $d_M(a, x)$). Folglich gilt:

$$d_M((a_1, a_2), (x_1 + a_2 - x_2, a_2)) = d_M((a_1, a_2), (x_1, x_2))$$

Analog dazu können wir einen Punkt $y = (y_1, y_2) \in B(c_1, c_2)$ wählen, sodass:

$$d_B(B(a), B(c_1, c_2)) = d_M(a, y) = d_M(a, (y_1 + a_2 - y_2, a_2))$$

Da diese Abstände gleich groß sind, gilt:

$$\begin{aligned} d_M((a_1, a_2), (x_1 + a_2 - x_2, a_2)) &= d_M((a_1, a_2), (y_1 + a_2 - y_2, a_2)) \\ |a_1 - x_1 - a_2 + x_2| &= |a_1 - y_1 - a_2 + y_2| \\ |(a_1 - a_2) - (x_1 - x_2)| &= |(a_1 - a_2) - (y_1 - y_2)| \end{aligned}$$

Wenn beide Beträge positiv bzw. negativ wären, wäre:

$$\begin{aligned} (a_1 - a_2) - (x_1 - x_2) &= (a_1 - a_2) - (y_1 - y_2) \\ x_1 - x_2 &= y_1 - y_2 \end{aligned}$$

Da unsere Bahnen in diesem Fall allerdings nicht mehr unterschiedlich währen, muss einer der Beträge einen positiven und der andere einen negativen Term beinhalten. Alle weiteren Bahnen mit gleichem Abstand zu $B(a_1, a_2)$ haben nun nach analogem Vorgehen entweder einen positiven oder einen negativen Term im Betrag, weshalb diese identisch zu $B(b_1, b_2)$ oder $B(c_1, c_2)$ sind. Zuletzt ist zu bemerken, dass $B(b_1, b_2) = B(c_1, c_2)$ nicht ausgeschlossen ist, weshalb es stets maximal 2 unterschiedliche Bahnen gibt. $\square$

Definition 2.23. *Im folgenden sei $B_0 = B(0,0)$.*

Lemma 2.24. *Zwei Bahnen $B_1 \neq B_2$ mit $d_B(B_0, B_1) = d_B(B_0, B_2) = s$ sind überlappend.*

Beweis. Aus Lemma 2.22 geht hervor, dass es maximal zwei mögliche Bahnen mit Abstand s geben kann und diese durch die Punkte $(s,0)$ und $(-s,0)$ verlaufen müssen. O.B.d.A sei $(s,0) \in B_1$ und $(-s,0) \in B_2$. Wir können nun jeden Punkt auf B_1 durch $(0,s) + i$ mit einem Vektor i darstellen. Folglich ist nach Lemma 2.13 der Punkt $(0,-s) - i \in B_2$. Nach Lemma 2.9 sind die Bahnen nun überlappend. □

Satz 2.25. *Die Anzahl an Bahnen in $M(n,m)$ ist stets $ggT(2(n-1), 2(m-1))$.*

Beweis. Nach Lemma 2.7 sind zwei Bahnen $B(a,b), B(c,d) \in M(n,m)$ gleich, wenn gilt:

$$a - b \equiv c - d \mod ggT(2(n-1), 2(m-1))$$

Da die Startpunkte der Bahn $a, b \in \mathbb{Z}$ sind, gibt es $ggT(2(n-1), 2(m-1))$ mögliche Werte für $a - b \mod ggT(2(n-1), 2(m-1))$. Daher gibt es auch $ggT(2(n-1), 2(m-1))$ unterschiedliche Bahnen. □

Lemma 2.26. *Die Anzahl an paarweise nicht überlappenden Bahnen ist stets $ggT(n-1, m-1) + 1$.*

Beweis. Wie in Satz 2.25 bewiesen, existieren $ggT(2(n-1), 2(m-1))$ Bahnen in $M(n,m)$. Nach Lemma 2.9 können wir zu jeder Bahn $B(a_1, a_2)$ eine überlappende Bahn $B(-a_1, -a_2)$ konstruieren. Hierbei muss beachtet werden, dass sich diese Bahnen nicht zwingend unterscheiden. Die beiden Bahnen sind gleich, wenn:

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 &\equiv -(a_1 - a_2) \mod ggT(2(n-1), 2(m-1)) \\ 2(a_1 - a_2) &\equiv 0 \mod ggT(2(n-1), 2(m-1)) \end{aligned}$$

Dies ist genau dann der Fall wenn:

$$a_1 - a_2 \equiv 0 \mod ggT(2(n-1), 2(m-1))$$

oder

$$a_1 - a_2 \equiv ggT(n-1, m-1) \mod ggT(2(n-1), 2(m-1))$$

Folglich gibt es $ggT(2(n-1), 2(m-1)) - 2$ Bahnen, die jeweils eine überlappende Bahn besitzen. Die Anzahl an paarweise nicht überlappenden Bahnen ist folglich

$$\frac{ggT(2(n-1), 2(m-1)) - 2}{2} + 2 = ggT(n-1, m-1) + 1$$

□

Definition 2.27. *Es sei $H_i(B(a_1, a_2))$ mit $0 \leq i \leq 4$ die Anzahl aller Felder des Schachbrettes, welche in i verschiedene Richtungen von der Bahn $B(a_1, a_2)$ durchlaufen werden.*

Satz 2.28. *Für alle Modulofelder mit* $\mathrm{ggT}(n-1, m-1) = 1$ *gilt für jede Bahn* $B(a_1, a_2) \in M(n, m)$*:*

$$H_0(B(a_1, a_2)) = \frac{nm}{2} \tag{2.6}$$
$$H_1(B(a_1, a_2)) = 2 \tag{2.7}$$
$$H_2(B(a_1, a_2)) = n + m - 4 \tag{2.8}$$
$$H_3(B(a_1, a_2)) = 0 \tag{2.9}$$
$$H_4(B(a_1, a_2)) = \frac{nm}{2} - n - m + 2 \tag{2.10}$$

Beweis. Es ist zu bemerken, dass jede Bahn in einem Feld mit $\mathrm{ggT}(n-1, m-1) = 1$ durch 2 der Ecken verläuft und in diesem Kontext die einfach durchlaufenen Felder den beiden Ecken, die zweifach durchlaufenen Felder den Randfeldern und die vierfach durchlaufenen Felder die restlichen Felder der Bahn beschreiben.
Nach Lemma 2.26 gibt es genau 2 nicht überlappende Bahnen. Nach Definition 2.8 bedeutet dies, dass genau 2 unterschiedliche Bahnen im Schachbrett vorhanden sind. Daher muss eine der Bahnen auf den „weißen" und die andere Bahn auf den „schwarzen" Feldern verlaufen. $H_0(B(a_1, a_2))$ entspricht folglich der Anzahl an Feldern der jeweils anderen Farbe.
Aus $\mathrm{ggT}(n-1, m-1) = 1$ folgt, dass n oder m gerade sein muss. In Zeilen bzw. Spalten mit gerader Anzahl an Feldern, muss es genauso viele weiße wie schwarze Felder geben, weshalb unser Schachfeld genauso viele weiße wie schwarze Felder besitzt. Folglich gilt:

$$H_0(B(a_1, a_2)) = \frac{nm}{2}$$

Für jeden Punkt $(x_1, x_2) \in B(a_1, a_2)$ gilt:

$$x_1 - x_2 \equiv a_1 - a_2 \mod \mathrm{ggT}(2(n-1), 2(m-1))$$
$$x_1 - x_2 \equiv a_1 - a_2 \mod 2$$

Für eine ganze Zahl z gilt außerdem, dass $z \equiv -z \mod 2$. Hieraus folgt durch Einsetzen, jeder Punkt $(x_1, x_2) \in B(a_1, a_2)$ mit $x_1 \neq 0, n-1$ und $x_2 \neq 0, m-1$ nach Satz 2.6 vier mal durchlaufen wird. Da x_1 bzw. x_2 stets modulo $2(n-1)$ bzw. $2(m-1)$ betrachtet wird, betrifft dies $2(n-1) - 2$ Spalten und $2(m-1) - 2$ Zeilen. Es kann wie oben argumentiert werden, dass stets die Hälfte dieser Felder auf $B(a_1, a_2)$ liegen. Es ergeben sich also $\frac{(2(n-1)-2)(2(m-1)-2)}{2} = 2nm - 4n - 4m + 8$ Felder die auf $B(a_1, a_2)$ liegen. Es beschreiben stets vier dieser Felder dasselbe Schachbrettfeld, weshalb:

$$H_4(B(a_1, a_2)) = \frac{2nm - 4n - 4m + 8}{4} = \frac{nm}{2} - n - m + 2 \tag{2.11}$$

Für alle restlichen Koordinaten des Modulofeldes gilt nun, dass $x_1 = 0, n-1$ oder $x_2 = 0, m-1$. Hieraus folgt, dass $x_1 \equiv -x_1 \mod 2(n-1)$ oder $x_2 \equiv -x_2 \mod 2(m-1)$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. $x_1 = 0, n-1$ und $x_2 = 0, m-1$

   Alle der in Satz 2.6 genannten Gleichungen beschreiben denselben Punkt im Modulofeld, weshalb jeder der Punkte $(0, 0)$, $(n-1, 0)$, $(0, m-1)$, $(n-1, m-1)$ nur ein mal durchlaufen wird. Aus $\mathrm{ggT}(n-1, m-1) = 1$ folgt, dass $n-1$ oder

$m-1$ ungerade ist. Es können also nur die Hälfte der Punkte auf $B(a_1, a_2)$ liegen, weshalb gilt:

$$H_1(B(a_1, a_2)) = 2 \tag{2.12}$$

2. Entweder $x_1 = 0, n-1$ oder $x_2 = 0, m-1$

   Hier fallen nun stets je zwei der Gleichungen aus Satz 2.6 zusammen. Nach Abzug der Punkte aus 1. gibt es je $2(n-1)-2$ Koordinaten mit $x_2 = 0, m-1$ und je $2(m-1)-2$ Koordinaten mit $x_1 = 0, n-1$. Da sowohl $2(n-1)$ als auch $2(m-1)$ gerade ist, gibt es insgesamt genauso viele schwarze wie weiße Felder. Da außerdem alle bisher betrachteten Felder gleiche Anzahlen an weißen und schwarzen Feldern hatten, muss auch hier wieder die Hälfte der Felder schwarz bzw. weiß sein und damit die Hälfte auf der Bahn $B(a_1, a_2)$ liegen. Zuletzt beschreiben nun immer 2 Felder dasselbe Feld des Schachbrettes, weshalb:

$$H_2(B(a_1, a_2)) = \frac{2(2(n-1)-2) + 2(2(m-1)-2)}{2 \cdot 2} = n + m - 4 \tag{2.13}$$

Wir wissen, dass das Schachbrett nm Felder hat. Durch Addition unserer bisherigen Ergebnisse erhalten wir:

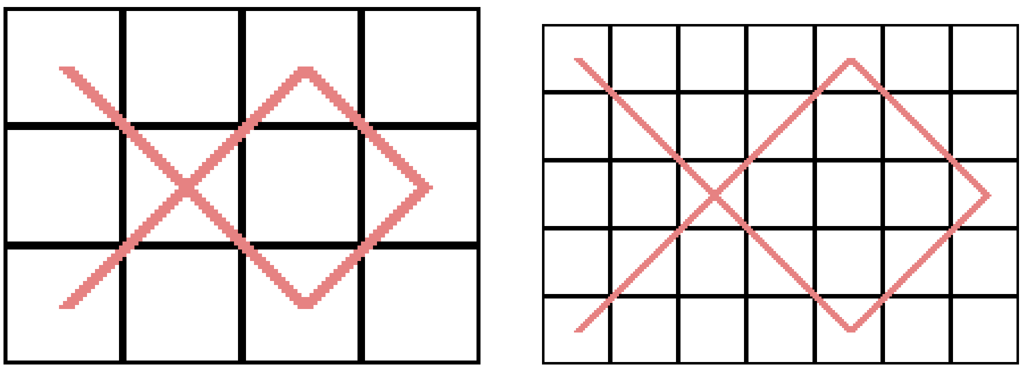
$$H_1(B(a_1, a_2)) + H_2(B(a_1, a_2)) + H_4(B(a_1, a_2)) = nm \tag{2.14}$$

Folglich gilt:

$$H_3(B(a_1, a_2)) = 0 \tag{2.15}$$

□

Wir betrachten nun zwei Schachfelder mit den Seitenlängen 3, 4 und 4, 7. In beiden Feldern startet eine Bahn in der unteren linken Ecke:



(c) (d)

Es ist zu erkennen, dass beide Bahnen einen ähnlichen Verlauf haben und die Anzahl an Randfeldern und Schnittpunkten identisch sind.

Lemma 2.29. *Die Bahn B_0 des Feldes mit den Seitenlängen n, m mit $\mathrm{ggT}(n-1, m-1) = j$ hat die selbe Anzahl an Randfeldern und Schnittpunkten, wie die Bahn $B(0,0)$ des Feldes mit den Seitenlängen $\frac{n-1}{j}+1$, $\frac{m-1}{j}+1$*

Beweis. Da die Bahn auf dem Schachfeld stets kurz vor dem eigentlichen Rand abprallt, bewegen sich die oben genannten Bahnen eigentlich auf Brettern mit Längen $n-1$, $m-1$ bzw. $\frac{n-1}{j}$, $\frac{m-1}{j}$. Da sich die Bretter nur um den Faktor j in der Größe unterscheiden, sind sie geometrisch ähnlich zueinander. Da zusätzlich beide Bahnen in der unteren linken Ecke beginnen, verlaufen die Bahnen innerhalb der Bretter auch geometrisch ähnlich zueinander. Folglich haben beide Bahnen die gleiche Anzahl an Schnittpunkten, sowie Randfelder. □

Wir wollen nun Aussagen über Schnittpunkte in allen $n \cdot m$ großen Schachbrettern treffen. Hierbei entsteht das Problem, dass Schnittpunkte von Bahnen, die Ecken beinhalten vier mal durchlaufen werden und Schnittpunkte von Bahnen ohne Ecken nur zwei mal. Für einige der folgenden Beweise führen wir deshalb den Begriff des Einzelschnitts ein.

Definition 2.30. *Es sei ein Einzelschnitt das zweifache Durchlaufen eines Feldes in nicht entgegengesetzte Richtung.*

Ein Einzelschnitt im von einer Bahn durchlaufenen Feld (x_1, x_2) im Modulofeld kommt vor, wenn entweder $(x_1, -x_2)$ oder $(-x_1, x_2)$ von der Bahn durchlaufen werden.
Dies bedeutet, dass der Schnittpunkt in Abbildung 12 vier Einzelschnitten entspricht, da sich an diesem vier Paare finden, die die obige Definition erfüllen.

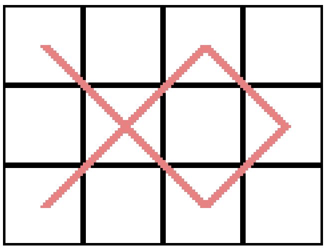


Abbildung 12: Bahn mit Schnittpunkt bei $(1, 1)$

Lemma 2.31. *Das Verschieben des Startpunkts einer Bahn um* $(0, 1)$ *ändert nicht die Anzahl an Einzelschnitten der Bahn.*

Beweis. Alle Punktepaare im Modulofeld, bei denen sowohl (x_1, x_2) als auch $(-x_1, x_2)$ auf der Bahn liegen und somit einen Einzelschnitt bilden, werden durch das Verschieben der Bahn um $(0, 1)$ verschoben und bleiben somit erhalten. Da nach Lemma 2.7 die um $(0, 1)$ verschobene Bahn identisch zu einer um $(-1, 0)$ verschobenen Bahn ist, werden alle Punktepaare, bei denen sowohl (y_1, y_2) als auch $(y_1, -y_2)$ auf der Bahn liegen und somit einen Einzelschnitt bilden, um $(-1, 0)$ verschoben und bleiben somit ebenfalls erhalten. Da die Bahn lediglich verschoben wird, entstehen keine neuen Punktepaare eines Einzelschnitts. Da alle bisherigen Einzelschnitte erhalten bleiben, verändert sich die Anzahl an Einzelschnitten nicht. □

Lemma 2.32. *Alle Bahnen auf einem Schachbrett haben die selbe Anzahl an Einzelschnitten.*

Beweis. Da nach Lemma 2.31 die Anzahl an Einzelschnitten einer Bahn durch die Verschiebung um $(0, 1)$ nicht verändert wird und jede Bahn durch wiederholtes Verschieben einer anderen Bahn um $(0, 1)$ gebildet werden kann, hat jede Bahn auf dem Schachbrett die selbe Anzahl an Einzelschnitten. □

Lemma 2.33. *Die Anzahl an Schnittpunkten einer Bahn $B(a,b)$, die nicht durch eine der Ecken verläuft, entspricht der Summe aus dem Vierfachen der Anzahl an Schnittpunkten von B_0 und der Anzahl der Randfelder von B_0.*

Beweis. Da B_0 eine Eckenbahn ist und Eckenbahnen durch jedes Feld hin und zurück gehen, befindet sich bei jeder Randberührung außerhalb einer Ecke der Bahn B_0 ein Einzelschnitt und bei jedem Schnittpunkt vier Einzelschnitte. Da $B(a,b)$ keine Eckenbahn ist, kann sie durch kein Feld hin und zurück gehen, weshalb jeder Einzelschnitt einer solchen Bahn ein eigener Schnittpunkt ist. Da nach Lemma 2.32 die Anzahl der Einzelschritten identisch zu der von B_0 ist, ist die Anzahl der Schnittpunkte von $B(a,b)$ vier mal die Anzahl an Schnittpunkten von B_0 + die Anzahl der Randfelder von B_0. □

Satz 2.34. *Die Anzahl an Schnittpunkten einer Bahn $B(a,b)$ mit $\mathrm{ggT}(n-1,m-1)=j$ beträgt*

$$\frac{(n-1)(m-1)}{2j^2}-\frac{n-1}{2j}-\frac{m-1}{2j}+0,5$$

falls $B(a,b)$ eine Ecke enthält und

$$\frac{2(n-1)(m-1)}{j^2}-\frac{n-1}{j}-\frac{m-1}{j}$$

falls $B(a,b)$ keine Ecke enthält.

Beweis. Nach Lemma 2.29 können wir für eine Bahn, die eine Ecke enthält, auch die Anzahl an Schnittpunkten der Bahn B_0 im Feld mit den Längen $\frac{n-1}{j}+1$, $\frac{m-1}{j}+1$ bestimmen. Da $\mathrm{ggT}(\frac{n-1}{j},\frac{m-1}{j})=1$, gilt nach Satz 2.28, dass die Anzahl an Schnittpunkten folgendem entspricht:

$$\begin{aligned}\frac{(\frac{n-1}{j}+1)(\frac{m-1}{j}+1)}{2}-(\frac{n-1}{j}+1)-(\frac{m-1}{j}+1)+2\\ =\frac{\frac{(n-1)(m-1)}{j^2}+\frac{n-1}{j}+\frac{m-1}{j}+1}{2}-\frac{n-1}{j}-\frac{m-1}{j}\\ \frac{(n-1)(m-1)}{2j^2}-\frac{n-1}{2j}-\frac{m-1}{2j}+0,5\end{aligned}$$

Für Bahnen ohne eine Ecke, können wir die Anzahl an Schnittpunkten mit Lemma 2.33 bestimmen. Die Anzahl an Randfeldern ergibt sich hierbei wieder mit Lemma 2.29 und Satz 2.28:

$$\begin{aligned}4(\frac{(n-1)(m-1)}{2j^2}-\frac{n-1}{2j}-\frac{m-1}{2j}+0,5)+((\frac{n-1}{j}+1)+(\frac{m-1}{j}+1)-4)\\ =\frac{2(n-1)(m-1)}{j^2}-\frac{2n-2}{j}-\frac{2m-2}{j}+2+\frac{n-1}{j}+\frac{m-1}{j}-2\\ =\frac{2(n-1)(m-1)}{j^2}-\frac{n-1}{j}-\frac{m-1}{j}\end{aligned}$$

□

Satz 2.35. *Die Werte H_0 bis H_4 einer Bahn $B(a,b)$ mit* $\mathrm{ggT}(n-1,m-1)=j$ *betragen:*

$$H_0 = nm - H_1 - H_2 - H_4$$
$$H_1 = 2$$
$$H_2 = \frac{(n-1)(m-1)}{j} - \frac{(n-1)(m-1)}{j^2} + \frac{n-1}{j} + \frac{m-1}{j} - 2$$
$$H_3 = 0$$
$$H_4 = \frac{(n-1)(m-1)}{2j^2} - \frac{n-1}{2j} - \frac{m-1}{2j} + 0,5$$

falls $B(a,b)$ eine Ecke enthält und

$$H_0 = nm + \frac{2(n-1)(m-1)}{j^2} - \frac{n-1}{j} - \frac{m-1}{j} - kgV(2(n-1),2(m-1))$$
$$H_1 = \frac{2(n-1)(m-1)}{j} - \frac{4(n-1)(m-1)}{j^2} + \frac{2n-2}{j} + \frac{2m-2}{j}$$
$$H_2 = \frac{2(n-1)(m-1)}{j^2} - \frac{n-1}{j} - \frac{m-1}{j}$$
$$H_3 = 0$$
$$H_4 = 0$$

wenn $B(a,b)$ keine Ecke enthält.

Beweis. Falls $B(a,b)$ eine Ecke enthält, entspricht H_4 der Anzahl der Schnittpunkte. Nach Satz 2.34 gilt also:

$$H_4 = \frac{(n-1)(m-1)}{2j^2} - \frac{n-1}{2j} - \frac{m-1}{2j} + 0,5$$

Da wir uns auf einer Bahn befinden, die durch eine Ecke verläuft, gehen wir stets in beide Richtungen durch jedes Feld. Folglich können wir ein Feld nie eine ungerade Anzahl oft durchlaufen, mit der Ausnahme der beiden Ecken, die jeweils einmal durchlaufen werden. follglich ist:

$$H_3 = 0$$
$$H_1 = 2$$

Nach Satz 2.4 brauchen wir insgesamt $kgV(2(n-1),2(m-1))$ Schritte, um erneut zum Startfeld zu kommen. Dies beinhaltet nun jedes Feld von H_4 viermal, jedes Feld von H_3 dreimal... Folglich gilt für H_2:

$$H_2 = \frac{kgV(2(n-1),2(m-1)) - 4H_4 - 3H_3 - H_1}{2}$$
$$= \frac{kgV(2(n-1),2(m-1)) - 4(\frac{(n-1)(m-1)}{2j^2} - \frac{n-1}{2j} - \frac{m-1}{2j} + 0,5) - 2}{2}$$

Außerdem gilt:

$$kgV(2(n-1),2(m-1)) = 2 \cdot kgV(n-1,m-1)$$
$$= 2\frac{(n-1)(m-1)}{\mathrm{ggT}(n-1,m-1)} = \frac{2(n-1)(m-1)}{j}$$

Dies können wir nun in die Gleichung für H_2 einsetzen und vereinfachen:

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{\frac{2(n-1)(m-1)}{j} - \frac{2(n-1)(m-1)}{j^2} + \frac{2n-2}{j} + \frac{2m-2}{j} - 2 - 2}{2} \\ &= \frac{(n-1)(m-1)}{j} - \frac{(n-1)(m-1)}{j^2} + \frac{n-1}{j} + \frac{m-1}{j} - 2 \end{aligned}$$

H_0 ist nun der Rest der Felder:

$$H_0 = nm - H_1 - H_2 - H_3 - H_4 = nm - H_1 - H_2 - H_4$$

Die Aussagen für Bahnen mit Ecken sind somit bewiesen. Da eine Bahn ohne Ecke niemals mehr als 2 mal durch ein Feld laufen kann, gilt:

$$\begin{aligned} H_4 &= 0 \\ H_3 &= 0 \end{aligned}$$

H_2 entspricht den Schnittpunkten der Bahn, nach Satz 2.34 gilt folglich:

$$H_2 = \frac{2(n-1)(m-1)}{j^2} - \frac{n-1}{j} - \frac{m-1}{j}$$

H_1 lässt sich wieder durch die Bahnlänge berechnen:

$$\begin{aligned} H_1 &= kgV(2(n-1), 2(m-1)) - 2(\frac{2(n-1)(m-1)}{j^2} - \frac{n-1}{j} - \frac{m-1}{j}) \\ &= \frac{2(n-1)(m-1)}{j} - \frac{4(n-1)(m-1)}{j^2} + \frac{2n-2}{j} + \frac{2m-2}{j} \end{aligned}$$

Zuletzt entspricht H_0 wieder dem Rest der Felder:

$$\begin{aligned} H_0 = nm - H_2 - H_1 &= nm - H_2 - (kgV(2(n-1), 2(m-1)) - 2H_2) \\ &= nm + H_2 - kgV(2(n-1), 2(m-1)) \\ = nm + \frac{2(n-1)(m-1)}{j^2} - \frac{n-1}{j} - \frac{m-1}{j} &- kgV(2(n-1), 2(m-1)) \end{aligned}$$

□

3 Ergebnisse

Wir können nun alle Fragestellungen beantworten:

1. Wie lang ist die Bahn?

   Nach Satz 2.4 ist die Bahn $kgV(2(n-1), 2(m-1))$ Schritte lang.

2. Wie oft berührt die Bahn den Rand?

   Nach Satz 2.5 berührt die Bahn $\frac{kgV(2(n-1),2(m-1))}{n-1} + \frac{kgV(2(n-1),2(m-1))}{m-1}$ mal den Rand.

3. Wie oft überschneidet sich die Bahn?

   Die Anzahl an Schnittpunkten lässt sich mithilfe der Formeln aus Satz 2.34 berechnen.

4. Wie viele Felder werden von der Bahn i-mal durchquert für $0 \leq i \leq 4$?

   Dies lässt sich mithilfe der Formeln aus Satz 2.35 berechnen.

5. Wie viele unterschiedliche Bahnen existieren auf dem Schachbrett?

   Nach Lemma 2.26 gibt es $\text{ggT}(n-1, m-1)+1$ unterschiedliche Bahnen auf dem Schachbrett.

4 Ausblick

Wir haben nun unsere Fragestellungen beantwortet. Der nächste Schritt besteht darin, die Fragestellung vom 2-Dimensionalen ins 3-Dimensionale zu erweitern und anschließend die genannten Fragen auch für einen allgemeinen Fall für das n-Dimensionale zu beantworten. Ein mögliches Problem dabei ist, dass das Überprüfen, ob ein Punkt auf der Bahn liegt, nun drei Gleichungen benötigt, da wir immer nur zwei der drei Koordinaten in Relation stellen können.

5 Danksagung

Wir bedanken uns sehr bei Herrn Prof. Dr. Frank Herrlich und Herrn Dr. Peter Kaiser von dem Karlsruher Institut für Technik (KIT), für die Möglichkeit, an diesem Projekt teilzuhaben, sowie für die stetige Unterstützung während des Projekts.
Weiter bedanken wir uns bei Thomas Knecht, Dietmar Gruber und allen anderen Betreuern des Hector-Seminars, die uns über die Jahren sehr stark unterstützt und begleitet haben. Auch bedanken wir uns auch bei Dr. Hans-Werner Hector und Josephine Hector, die durch ihre Stiftung das Hector-Seminar überhaupt erst möglich machen.

6 Selbständigkeitserklärung

Hiermit versichern wir, dass wir die vorliegende Arbeit unter der Beratung von Herrn Prof. Dr. Frank Herrlich und Herrn Dr. Peter Kaiser selbständig verfasst haben und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt haben.

Artur Radestock

Sebastian Störzbach